



# Contribution à l'étude de la pression de radiation acoustique : application à la non linéarité de l'élasticité de cisaillement des solides mous

Mathieu Rénier

## ► To cite this version:

Mathieu Rénier. Contribution à l'étude de la pression de radiation acoustique : application à la non linéarité de l'élasticité de cisaillement des solides mous. Acoustique [physics.class-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2008. Français. NNT: . tel-00297132

**HAL Id: tel-00297132**

**<https://theses.hal.science/tel-00297132>**

Submitted on 15 Jul 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris 7 - Denis Diderot

Année 2008

Numéro attribué par la bibliothèque :

\_\_\_\_\_

Thèse de Doctorat

Présentée par

Mathieu RENIER

Pour l'obtention du grade de Docteur de l'Université Paris 7

Ecole Doctorale : Physique Macroscopique

Spécialité : Acoustique Physique

# Contribution à l'étude de la pression de radiation acoustique : application à la non linéarité de l'élasticité de cisaillement des solides mous

Directeur de Thèse : Daniel Royer

Encadrant : Christophe Barrière

Soutenue le 23 juin 2008 devant le jury composé de :

Olivier BOU MATAR LACAZE

Rapporteur

Vitalyi GUSEV

Rapporteur

François COULOUVRAT

Président du jury

Pascal LAUGIER

Examineur

Daniel ROYER

Directeur de thèse

Christophe BARRIERE

Encadrant

## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier messieurs Olivier Bou Matar Lacaze et Vitalyi Gusev, pour avoir accepté de rapporter ce mémoire. Je remercie également monsieur Pascal Laugier pour sa participation à ce jury et monsieur François Coulouvrat pour l'avoir présidé.

Pour qui n'en a pas fait l'expérience, il est peut être d'usage de considérer qu'une thèse s'écrit seul. Ceci est bien sûr faux, ou alors il s'agit d'une « solitude peuplée ». Peuple qu'il me faut bien sûr remercier.

Parmi ce peuple, on trouve en tête Daniel Royer. Il a su diriger ces travaux de sa bienveillance et avec un enthousiasme communicatif. Je n'oublie pas ses encouragements lorsque le soir il descendait prendre ces « RTT » à l'atelier de mécanique. Qu'il m'autorise à dire qu'il est un grand homme, et j'en veux pour preuve le fait qu'il ait la tête dans les étoiles et les pieds sur terre. Je lui dois aussi d'avoir découvert l'automatique directement par le biais de l'enseignement, ce qui me conforte dans l'idée que c'est finalement en tentant d'apprendre aux autres à forger que l'on devient (un peu) forgeron.

Vient ensuite Christophe Barrière, pour son aide, sa tempérance, ses compétences tant pédagogiques que scientifiques. Alors que je n'en menais pas large, il était là pour me faire répéter au pied d'un arbre dix minutes avant le début d'un congrès. Les discussions furent toujours constructives et stimulantes. En son absence, le simple fait de lui écrire un mail pour faire état des problèmes rencontrés m'a souvent permis de m'apercevoir d'une erreur monumentale commise, me dispensant de l'envoi de trois pages d'élucubrations. Christophe et Daniel ont patiemment et efficacement relu et corrigé ce mémoire, malgré leur emploi du temps chargé.

Il me faut ici citer Xavier Jacob. De mon arrivée au laboratoire à son départ en post-doc, j'ai pu profiter de ses talents d'expérimentateur. Il a toujours été disponible et a su me faire partager son goût pour l'analyse des raisons pour lesquelles une manip ne fonctionne pas, pas jusqu'à la déception lorsque celle-ci marche enfin.

Lors de la deuxième année, Jean-Luc Gennisson m'a proposé de travailler avec lui sur la non linéarité des ondes de cisaillement, et ainsi m'a fait gagné un étage. Très dynamique, il m'a permis de m'investir dans un de ses projets de recherche et de sortir de la pression de radiation par....la pression de radiation.

Xavier et Jean-Luc ne figurent pas en qualité d'encadrants de cette thèse, mais ont très largement contribué à sa réalisation.

Daniel, Christophe, Xavier et Jean-Luc m'ont tous beaucoup appris, et donné goût à la recherche, de façon complémentaire. Je les en remercie.

Merci aussi à Régis Marchiano et François Coulouvrat, pour m'avoir permis d'utiliser leur code KZK (dont la lecture est tout à fait abordable, même pour un non initié). La reproduction numérique des résultats expérimentaux a préservé mon sommeil, sans aucun symptôme d'ennui.

A ce peuple s'ajoutent ensuite les habitants du laboratoire. Le sous-sol d'abord. Jean-Pierre, joueur de Gwo-ka. A l'atelier, Abdel, amateur de café et cigarettes, Daniel lorsqu'il travaille son mobilier en duralumin, Eric et son tuning pour vélos. La salle Laser, enclave bretonne, refuge d'un Dominique Clorennec, où il a pu assouvir sa passion pour les lunettes de Polnareff. Les salles de manips, accueillant les stagiaires. Au pied de l'escalier, Franck, expert en mots fléchés/croisés. Thomas, qui déplace son flipper-échographe sans jamais le faire tilter, Sébastien, Geoffroy, Alex, Alice, et Jean-Gab, physicien ménestrel. En montant quelques marches, on trouve Patricia, dont la disponibilité et surtout la gentillesse vous rendrons difficile un refus de son aide, entre autres pour le pot, encore merci. Un peu plus haut, les deux bureaux de thésards, l'un groupant ceux du nord, de la Franche-comté, la

Bretagne, Montreuil, du Havre, ou de la Mayenne, qui travaillent beaucoup tout en riant. L'autre, ceux du sud, Meudon, Monaco, Avignon, la Tunisie, ou Bordeaux qui rient très fort en travaillant. Après quelques pas dans le couloir, le bureau des mathématiciens, qui accueille aussi les Amériques et leur étrange relation avec leur vélo. La pièce suivante, Philippe, jamais avare de conseils en électronique autour d'un liquide bulleux. Enfin, à l'étage supérieur, les permanents au dynamisme convivial si essentiel au développement de ce laboratoire.

Une solitude relative donc...Merci.

Et ce n'est pas tout, viennent les amis : Norbert, notamment pour son rhum-gingembre qui ne rend pas aveugle, Julien, Elodie, Faustine, Aurélien, Judith, Jamila, Lamia, Ahmed, Romain, Yann, Manu. La joueuse de ukulélé, qui m'a supporté quelques temps, aux bons moments.

Les parents, bien sûr, pour l'écoute, la présence, les « tu fais quoi exactement ? », « bon et après? », « Acoustique ? Tu peux peut être m'aider, mon lecteur DVD ne marche pas ». Et le plus récent : « T'auras un micro lors de la soutenance ? Parce que soutenir une thèse en acoustique sans que personne n'entende ce que tu racontes serait assez cocasse ».

Enfin la fratrie et descendance, pour le poulet-patates du dimanche. Pour m'avoir permis d'exprimer, dans la bonne humeur, mon absence de talent pour la peinture et l'enduit sur vos murs.

Il est peut être d'usage de considérer les remerciements comme faciles à écrire.

# Tables des matières

Introduction.....	7
Chapitre 1.....	11
Propagation non linéaire et pressions de radiation acoustiques dans les fluides .....	11
1.1. Propagation non linéaire des ondes acoustiques.....	14
1.1.1. Equations de conservation et de propagation en variables d'Euler .....	15
1.1.1.1. Choix du système de coordonnées .....	15
1.1.1.2. Equation de Navier-Stokes .....	17
1.1.1.3. Equation de conservation de la masse .....	18
1.1.1.4. Equation d'état du fluide .....	18
1.1.1.5. Equation de propagation non linéaire quadratique en pression .....	19
1.1.1.6. Equation de Westervelt.....	21
1.1.2. Conséquences sur la propagation d'une onde plane .....	22
1.1.2.1. Equation de Burgers .....	22
1.1.2.2. Propagation non linéaire d'une onde plane harmonique dans un fluide parfait .....	23
1.1.2.3. Propagation non linéaire d'une onde plane dans un fluide thermo-visqueux.....	25
1.1.2.4. Approximation quasi-linéaire .....	26
1.1.3. Diffraction et propagation non linéaire .....	29
1.1.3.1. Nombre de Khokhlov .....	29
1.1.3.2. Equation KZK .....	30
1.1.4. Propagation non linéaire dans le formalisme de Lagrange .....	31
1.1.4.1. Equation de propagation du déplacement.....	31
1.1.4.2. Déplacement statique.....	33
1.1.4.3. Déplacements eulerien et lagrangien.....	34
1.2. Pressions de radiation dans un fluide parfait.....	35
1.2.1. Introduction historique : pressions de radiation lumineuse et acoustique.....	35
1.2.2. Définitions de la pression de radiation en acoustique .....	41
1.2.2.1. Définition lagrangienne .....	41
1.2.2.2. Définition eulerienne .....	42
1.2.3. Tenseur des contraintes de radiation de Brillouin.....	42
1.2.4. Excès moyen de pression.....	44
1.2.5. Pression de radiation de Langevin en variables d'Euler .....	46
1.2.6. Pression de radiation de Rayleigh en variables d'Euler.....	47
1.2.7. Expressions des pressions de radiation en variables de Lagrange .....	50
1.2.7.1. Pression de radiation de Langevin .....	50
1.2.7.2. Pression de radiation de Rayleigh .....	51
1.2.8. Pression de radiation et propagation non linéaire .....	52
1.2.9. Expériences et applications dans la littérature.....	53
1.2.9.1. Tentatives expérimentales pour mettre en évidence la pression de radiation de Rayleigh .....	53
1.2.9.2. Applications de la pression de radiation de Langevin.....	54
1.3. Conclusion.....	56
Chapitre 2.....	59
Etude de l'auto-démodulation non linéaire et de son lien avec la pression de radiation de Rayleigh .....	59
2. 1. Introduction .....	61
2.2. Auto-démodulation non linéaire dans un fluide .....	62
2.2.1. Historique non exhaustif.....	62
2.2.2. Déplacement auto-démodulé .....	66
2.2.3. Cas limite d'une onde plane harmonique : déplacement statique.....	68
2.2.4. Ordres de grandeur.....	69
2. 3. Mesures optiques de champs acoustiques .....	70

2. 3.1 Sondes interferometriques optiques.....	70
2.3.2. Principe de l'interféromètre optique hétérodyne .....	71
2.3.3. Détection optique de champs ultrasonores dans l'eau .....	72
2.3.4. Traitement des signaux.....	74
2.3.4.1. Démodulation analogique.....	74
2.3.4.2. Démodulation numérique .....	75
2.4. Mesure du déplacement auto-démodulé par interférométrie optique .....	76
2.4.1. Dispositif expérimental .....	76
2.4.2. Résultats expérimentaux en champ proche .....	78
2.4.3. Mesures en champ lointain.....	83
2.4.4. Mesure du coefficient de non linéarité.....	84
2.4.5. Mesures dans l'huile de tournesol.....	86
2. 5. Etude numérique de la diffraction .....	88
2.5.1. Code KZK en potentiel.....	88
2.5.2 Simulation numérique des résultats expérimentaux.....	90
2.5.3. Simulation d'ondes planes.....	93
2.5.4. Rôle de l'atténuation .....	94
2.5.5. Effet de la durée du train d'ondes .....	96
2.5.6. Conclusion de l'étude numérique.....	98
2.6. Pression auto-démodulée .....	99
2.6.1. Contribution cumulative.....	100
2.6.2. Contribution non cumulative : lien avec la pression de radiation de Rayleigh .....	102
2.6.3. Discussion.....	105
2.6.3.1. A propos de la pression auto-démodulée.....	105
2.6.3.2. A propos de la force de radiation .....	107
2.7. Conclusion.....	109
Chapitre 3 .....	113
Force de radiation en milieu absorbant. Application à l'étude de la non linéarité de cisaillement dans les solides mous.....	113
3.1. Streaming acoustique .....	116
3.2. Force de radiation dans les solides mous .....	120
3.2.1. Elastographie impulsionnelle.....	121
3.2.2. Génération et détection des ondes de cisaillement.....	122
3.2.2.1. Approche théorique .....	122
3.2.2.2 Dispositif d'imagerie ultra-rapide .....	124
3.2.2.3 Traitement des signaux.....	125
3.2.2.4. Validation du modèle théorique.....	126
3.2.2.5. Mode supersonique.....	126
3.2.3. Etude expérimentale de la contribution de l'auto démodulation non linéaire.....	127
3.3. Propagation non linéaire des ondes de cisaillement dans les milieux mous quasi-incompressibles .....	133
3.3.1. Approche théorique.....	134
3.3.1.1. Tenseur des déformations .....	134
3.3.1.2. Densité d'énergie potentielle élastique.....	135
3.3.3. Milieu quasi-incompressible.....	137
3.3.4. Equation de Burgers modifiée.....	140
3.4. Mesure du coefficient de Landau A par acoustoélasticité .....	143
3.4.1. Acoustoélasticité dans les milieux isotropes incompressibles.....	144
3.4.2. Echantillons .....	148
3.4.3. Dispositif expérimental .....	149
3.4.4. Problème inverse.....	151
3.3.5. Résultats .....	152

3.4.6. Discussion.....	155
3.4.7. Conclusion .....	159
3.5. Propagation non linéaire d'une onde plane de cisaillement : mesure du coefficient élastique du quatrième ordre $D$ .....	159
3.5.1. Expression analytique de l'amplitude de la troisième harmonique .....	160
3.5.2. Mesure de la constante élastique du quatrième ordre $D$ .....	161
3.5.3. Conclusion .....	167
Conclusion générale .....	169
Références.....	172

## Introduction

L'intérêt pour les ondes acoustiques d'amplitude finie a vu le jour afin de tenter d'expliquer les différences entre la valeur de la vitesse du son établie par Newton en supposant une transformation isotherme et la valeur expérimentalement mesurée, qui, comme on le comprit plus tard, correspond en fait à une transformation adiabatique<sup>1</sup>. Depuis la seconde guerre mondiale, l'acoustique non linéaire est devenue un domaine de recherche se développant rapidement. Son approche théorique est nécessaire pour l'étude de phénomènes tels que la cavitation ou la sonoluminescence, dont les perspectives d'applications sont nombreuses. Le phénomène le plus connu est la distorsion d'une onde émise par une source lors de la propagation, qui est induite par les effets non linéaires « cumulatifs », par opposition aux effets non linéaires « locaux ».

Certains sujets ont été abordés avant que le formalisme aujourd'hui bien connu ait été mis au point. C'est le cas de la pression de radiation acoustique. Il s'agit de la force par unité de surface qu'exerce une onde acoustique sur un objet, un concept abordé par Lord Rayleigh peu de temps après la confirmation expérimentale de l'existence d'une pression exercée par le rayonnement électromagnétique. Comme son équivalent électromagnétique, cette pression de radiation acoustique est proportionnelle à la valeur moyenne temporelle de la densité d'énergie de l'onde. Conséquence d'un problème mal posé, ce concept a fait l'objet de controverses au cours de la première moitié du vingtième siècle. Deux pressions de radiation acoustiques ont été introduites théoriquement, sous l'hypothèse d'une onde plane harmonique. L'une dite pression de radiation de Langevin qui, exercée sur un objet parfaitement absorbant, est égale à la valeur moyenne de la densité d'énergie. L'autre, dite



pression de radiation de Rayleigh, fait intervenir le coefficient de non linéarité du milieu dans lequel l'objet est placé, et diffère de la précédente par l'existence d'une pression différente de la pression hydrostatique entre la source et l'objet. Théoriquement, en considérant la propagation non linéaire d'une onde plane, seule la pression de radiation de Rayleigh existe. Or, la mesure de la force exercée par une onde (non plane) sur un objet reconduisant invariablement au résultat de Langevin, la pression de radiation de Rayleigh a été alors envisagée comme une situation expérimentale particulière dans laquelle le milieu insonifié serait confiné, l'écartant par là de toute application potentielle. Au contraire la pression de Langevin est aujourd'hui très utilisée, notamment dans les applications médicales. Récemment, l'extension de cette dernière au cas d'un train d'ondes, afin d'optimiser ces applications, a été faite sans reposer le problème théoriquement. En particulier, l'excès moyen de pression dans la zone du milieu située entre la source et l'objet, est supposé nul.

L'objectif de cette thèse est d'étudier expérimentalement et d'analyser les conditions d'existence d'une pression quasi-statique de type « Rayleigh » induite par la propagation non linéaire d'un train d'ondes émis dans un liquide (eau) non confiné. Dans un solide mou (tissus biologiques), la pression de radiation est utilisée pour engendrer localement une onde de cisaillement. L'étude est donc étendue à ces milieux particuliers. Etant donné leur très faible vitesse (quelques m/s), la propagation de ces ondes donne lieu à des phénomènes non linéaires cubiques très importants. Ceux-ci sont observés et mesurés, à l'aide du dispositif d'imagerie ultra-rapide développé au laboratoire pour les applications médicales (élastographie).

Le premier chapitre débute par un bref rappel des équations constitutives de l'acoustique non linéaire dans les fluides. Les conséquences sur la propagation d'une ou de deux ondes sont rappelées. Nous rappelons que selon la description utilisée, matérielle ou courante, les expressions des quantités ne sont pas les mêmes. La différence entre une quantité exprimée en coordonnées lagrangiennes et son équivalent en coordonnées euleriennes est un terme non linéaire local, qui devient donc négligeable à mesure que la distance augmente devant d'éventuels effets non linéaires cumulatifs. Il est par contre nécessaire d'en tenir compte si la quantité n'est pas sujette à de tels effets non linéaires cumulatifs, ce qui est le cas de la pression de radiation. Nous reportons ensuite les différentes définitions historiquement introduites de ces deux pressions de radiation, ainsi que les applications que la pression de radiation de Langevin a permis de développer.

Dans le deuxième chapitre, grâce à l'interférométrie optique, nous étudions expérimentalement le déplacement auto-démodulé d'un train d'ondes. Il s'agit d'un

phénomène cumulatif bien connu, mais usuellement étudié en considérant la pression. Nous montrons que l'interférométrie est bien adaptée à l'étude de ce phénomène. Une composante quasi-statique du déplacement auto-démodulé est observée en champ proche. Une pression quasi-statique, mais non cumulative, lui est associée. Nous montrons qu'elle s'identifie à la pression de radiation de Rayleigh. Elle résulte de l'existence d'une valeur moyenne temporelle non nulle du gradient de déplacement en champ proche. Ainsi, la directivité de la source et la propagation non linéaire de l'onde suffisent à confiner localement le milieu, dans une zone limitée à la distance caractéristique de la diffraction de la composante auto-démodulée. La pression de radiation de Rayleigh, étendue au train d'ondes, existe donc en champ proche. En conséquence de la diffraction de la composante auto-démodulée, cette pression quasi-statique tend à s'annuler : la pression de radiation de Langevin est retrouvée en champ lointain.

Le troisième chapitre débute par une étude succincte de l'influence sur nos expériences du streaming acoustique, un écoulement du fluide d'origine acoustique, qui peut être interprété comme une conséquence d'un transfert de quantité de mouvement de l'onde au fluide, induit par l'absorption. Ce phénomène est apparenté à la pression de radiation dans les solides mous, utilisée pour l'imagerie des tissus biologiques, pour y engendrer une onde de cisaillement. Ces tissus, comme les gels qui permettent d'en mimer les propriétés élastiques linéaires, peuvent être considérés comme quasi-incompressibles. Après avoir rappelé que l'expression de la densité d'énergie potentielle élastique, associée au cisaillement, s'en trouve alors simplifiée, nous utilisons cette force de radiation pour générer des ondes de cisaillement, technique bien maîtrisée au laboratoire, lors d'une expérience d'acoustoélasticité. Cette expérience, dont le principe est la mesure des variations de la vitesse de propagation sous l'action d'une contrainte, permet d'estimer les modules élastiques de cisaillement jusqu'à l'ordre trois. Enfin, en couplant cette expérience à une mesure de l'amplitude de la troisième harmonique créée lors de la propagation non linéaire d'une onde plane de cisaillement, une estimation de la constante élastique du quatrième ordre est obtenue.



## **Chapitre 1**

Propagation non linéaire et pressions de radiation acoustiques  
dans les fluides



La première partie de ce chapitre introductif débute par le rappel de l'équation de propagation non linéaire de la pression acoustique dans un fluide thermo-visqueux, dans les variables d'Euler. Il s'agit, entre autres, de mettre en évidence l'origine des non linéarités « cumulative » et « locale » susceptibles d'intervenir lors de la propagation d'une onde acoustique. Dans le cas d'une onde plane, nous rappelons l'action de la non linéarité cumulative sur la propagation, grâce à l'équation de Burgers. La génération d'harmoniques et l'interaction à deux ondes sont alors brièvement décrites. L'équation de propagation en coordonnées « lagrangiennes », gouvernant le déplacement de la particule de fluide, est déduite de celle obtenue en coordonnées « euleriennes ». Nous commentons alors les différences entre ces deux descriptions. En particulier, nous rappelons que la différence entre la fonction représentant une quantité physique en variables d'Euler et son équivalent en variables de Lagrange ne fait intervenir que des termes locaux. Nous montrons ensuite qu'un déplacement statique est engendré au cours de la propagation, simultanément avec les harmoniques de la fréquence initiale. La solution en pression de l'équation de Burgers n'en rend pas compte.

La seconde partie de ce chapitre débute par un bref historique des recherches portant sur la pression de radiation acoustique. Nous donnons alors les deux définitions de la pression de radiation selon Rayleigh et Langevin. Dans les variables d'Euler, le tenseur des contraintes de radiation de Brillouin est introduit pour démontrer ces deux expressions de la pression de radiation acoustique, qui sont discutées. Dans la description lagrangienne, nous présentons l'approche de Westervelt, qui établit l'expression de la pression de radiation de Rayleigh à partir du déplacement statique induit par la propagation non linéaire d'une onde plane harmonique. Enfin, nous discutons des applications de la pression de radiation de Langevin.

## **1.1. Propagation non linéaire des ondes acoustiques**

La plupart des applications utilisant des ondes acoustiques, telles que le sonar en acoustique sous-marine, l'échographie en imagerie médicale ou encore le contrôle non destructif par ultrasons, ont été développées en supposant la propagation linéaire. Il s'agit d'une approximation, puisque les équations fondamentales de l'acoustique sont intrinsèquement non linéaires. Pour les rendre linéaires, on se contente généralement de préciser que les grandeurs physiques (la pression, le déplacement ou la vitesse des particules, la masse volumique...) ne subissent, lors de la propagation de l'onde, que de petites variations (d'ordre  $\varepsilon$ ) en regard de leurs valeurs au repos. Pour modéliser un régime de propagation non linéaire, il convient donc de garder au minimum les termes quadratiques (d'ordre  $\varepsilon^2$ ) des équations constitutives. En pratique, l'expérience montre que ces termes quadratiques suffisent à décrire la propagation non linéaire des ondes acoustiques dans les fluides.

L'hypothèse de linéarité implique qu'une onde acoustique se propage à vitesse constante. La vitesse du son est alors déduite des conditions d'équilibre thermodynamique du milieu, qui ne sont pas modifiées par la présence de l'onde acoustique. Au contraire, en régime de propagation non linéaire, la vitesse du son est une fonction linéaire de la pression acoustique. En conséquence, la forme d'onde se déforme au fur et à mesure que la distance de propagation augmente. Les petites perturbations de la vitesse du son, cumulées sur de longues distances, peuvent changer significativement la forme d'onde, même lorsque l'amplitude d'émission reste « raisonnable ».

### 1.1.1. Equations de conservation et de propagation en variables d'Euler

#### 1.1.1.1. Choix du système de coordonnées

La modélisation du mouvement d'une particule (macroscopique) de fluide ou de solide peut se faire selon deux descriptions. La description « lagrangienne » est basée sur l'étude, en fonction du temps  $t$ , des variations d'une quantité physique associée à une particule du milieu, définie par sa position  $\vec{a}$  de référence. Il s'agit donc d'un système de coordonnées mobile, suivant la particule dans son mouvement. La position de référence est généralement la position d'équilibre de la particule. Cette description est naturellement adaptée à la mécanique des milieux solides continus, où les particules de matière sont rigidement liées et occupent des positions initiales identifiables. Elle est donc couramment employée pour décrire la propagation des ondes élastiques dans les solides.

La représentation « eulerienne » s'attache à représenter l'évolution de cette même quantité physique à tout instant  $t$ , à une position fixe de l'espace  $\vec{x}$ . Elle est naturelle en hydrodynamique, où, par exemple lors de l'étude d'un écoulement, repérer une particule par rapport à sa position initiale n'est pas commode. L'acoustique dans les fluides hérite donc cette description eulerienne de l'hydrodynamique et nous nous sommes d'abord conformés à cet usage.

Si le choix de la description est, dans l'approximation de la propagation linéaire, sans conséquence sur l'expression des quantités, ce n'est plus le cas en régime non linéaire. Or l'équation fondamentale de la dynamique, qui régit la propagation des ondes, repose sur une approche lagrangienne du mouvement. Il convient d'adapter cette équation à l'étude d'un mouvement dans la description eulerienne.

Soit  $Q$  une quantité physique.  $Q^L$  désigne la fonction représentant cette quantité en coordonnées lagrangiennes :  $Q^L(\vec{a}, t)$ , et  $q$  son équivalent dans les variables d'Euler :  $q(\vec{x}, t)$ .

Ces deux fonctions sont reliées entre elles par :

$$Q^L(\vec{a}, t) = q(\vec{x} = \vec{a} + \vec{U}, t). \quad (1.1)$$

En effet, la particule qui se trouve initialement à la position  $\vec{a}$  est située à l'instant  $t$  en  $\vec{x} = \vec{a} + \vec{U}$ , où  $\vec{U}$  désigne le déplacement de cette particule.



La relation (1.1) peut être développée autour de la position d'équilibre  $\vec{a}$  de la particule. En limitant ce développement au second ordre, pour n'introduire que des termes non linéaires quadratiques ( $\varepsilon^2$ ), nous obtenons :

$$Q^L \cong [q]_{t, \vec{x}=\vec{a}} + \vec{U} \cdot [\vec{\nabla} q]_{t, \vec{x}=\vec{a}}, \quad (1.2)$$

où l'opérateur  $\vec{\nabla}$  désigne le gradient calculé en variables d'Euler.

De même,  $q$  s'écrit en fonction de  $Q^L$  :

$$q(\vec{x}, t) = Q^L(\vec{a} = \vec{x} - \vec{U}, t) \cong [Q^L]_{t, \vec{a}=\vec{x}} - \vec{U} \cdot [\vec{\nabla}_a Q^L]_{t, \vec{a}=\vec{x}}. \quad (1.3)$$

La forme locale de la relation fondamentale de la dynamique exprime la relation entre les forces exercées sur la particule fluide et son accélération. En variables de Lagrange, l'accélération  $\vec{a}^L$  est la dérivée par rapport au temps de la vitesse de la particule. En dérivant par rapport au temps la relation (1.2) écrite pour la vitesse particulaire, l'accélération s'exprime en coordonnées euleriennes :

$$\vec{a}^L = \frac{d\vec{V}^L}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left( \frac{d\vec{U}}{dt} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}, \quad (1.4)$$

où  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$  est la vitesse de la particule passant au point  $\vec{x}$  à l'instant  $t$ .

Si on remplace la dérivée temporelle du déplacement  $\vec{U}$  par le champ de vitesse en coordonnées euleriennes dans le second terme du membre de droite de l'équation (1.4), l'expression reste valable au même ordre d'approximation.

Pour l'accélération, la relation (1.2) s'écrit :

$$\vec{a}^L = \vec{a} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a}, \quad (1.5)$$

où  $\vec{a} = \vec{a}(\vec{x}, t)$  est l'accélération de la particule passant au point  $\vec{x}$  à l'instant  $t$ .

En identifiant les relations (1.4) et (1.5), on obtient l'expression de l'accélération en variables d'Euler :

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \equiv \frac{D\vec{v}}{Dt}. \quad (1.6)$$

La dérivée intervenant dans l'expression de  $\vec{a}$  en fonction de  $\vec{v}$  est appelée dérivée particulaire (notée  $D/Dt$ ).

L'expression de la dérivation par rapport au temps dépend donc de la description choisie. Le second terme de l'équation (1.6) est appelé terme de convection en hydrodynamique. Il s'interprète comme le flux du gradient de la quantité dont on calcule la dérivée temporelle.

### 1.1.1.2. Equation de Navier-Stokes

L'équation de Navier-Stokes est, dans le cas des fluides visqueux, la forme locale de la relation fondamentale de la dynamique (ou conservation de la quantité de mouvement). Elle s'écrit :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (-P\vec{I} + \vec{\tau}), \quad (1.7)$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique et  $P$  la pression dans le fluide.  $(\vec{I})_{ij} = \delta_{ij}$  est le tenseur identité de rang deux et  $\vec{\tau}$  le tenseur des contraintes visqueuses. Exprimé en fonction du taux de déformations dont les composantes sont  $D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ , le tenseur des contraintes visqueuses se décompose en contraintes normale et tangentielle :

$$\tau_{ij} = \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) D_{kk} \delta_{ij} + 2\eta D_{ij}. \quad (1.8)$$

$\zeta$  et  $\eta$  désignent respectivement la viscosité de volume et de cisaillement.

La masse volumique et la pression dans le fluide s'écrivent  $\rho = \rho_0 + \rho'$  et  $P = P_0 + p'$ .  $\rho_0$  et  $P_0$  désignent les valeurs au repos.  $\rho'$  et  $p'$  sont les excès de masse volumique et de pression induits par la propagation acoustique. L'équation (1.7) est réécrite en ne retenant que les termes d'ordre inférieur ou égal à  $\mathcal{E}^2$ . En supposant que le champ de vitesse est irrotationnel, c'est-à-dire qu'il s'exprime comme le gradient d'un potentiel scalaire ( $\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi$ ), nous obtenons l'expression :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} p' - \left( \zeta + \frac{4}{3}\eta \right) \Delta \vec{v} = -\rho_0 (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \rho' \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}, \quad (1.9)$$

où les termes linéaires sont regroupés dans le membre de gauche.

Comme nous cherchons à développer les équations jusqu'au second ordre ( $\mathcal{E}^2$ ), les termes non linéaires faisant intervenir un produit de quantités sont reformulés en utilisant des relations linéaires. L'erreur ainsi faite est d'ordre  $\mathcal{E}^3$ .

L'équation (1.9) devient alors :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} p' - \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \Delta \vec{v} = -\vec{\nabla} L. \quad (1.10)$$

$L$  est la densité lagrangienne d'énergie en régime linéaire, c'est-à-dire la différence entre les densités d'énergie cinétique  $E_c$  et potentielle  $E_p$  :  $L = \frac{1}{2} \rho_0 \vec{v}^2 - \frac{p'^2}{2\rho_0 c_0^2}$ .

#### 1.1.1.3. Equation de conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse traduit la continuité de la matière vue à l'échelle de l'onde :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (1.11)$$

En séparant les termes non linéaires quadratiques des termes linéaires, elle s'écrit :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\rho' \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho'. \quad (1.12)$$

A nouveau, les termes non linéaires sont réarrangés grâce aux relations linéaires entre les différentes grandeurs :

$$-\rho' \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial p'^2}{\partial t} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial E_p}{\partial t} \quad \text{et} \quad -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho' = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial E_c}{\partial t}.$$

Ainsi l'équation (1.12) devient :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial p'^2}{\partial t} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (1.13)$$

Le premier terme du membre de droite est à l'origine de la contribution dite « convective » à la propagation non linéaire cumulative de l'onde acoustique.

#### 1.1.1.4. Equation d'état du fluide

L'équation d'état décrit la réponse thermodynamique du milieu fluide à une sollicitation mécanique. On choisit d'exprimer les variations de la pression en fonction de celles de la masse volumique  $\rho$  et de l'entropie  $s$  :  $P = P(\rho, s)$ . Dans un fluide quelconque, il n'existe pas de loi de comportement universelle. Néanmoins, comme les écarts relatifs aux

grandeurs à l'équilibre sont faibles, la pression peut être développée autour de la masse volumique et de l'entropie à l'équilibre ( $\rho_0, s_0$ ).

Dans un fluide faiblement dissipatif, les variations d'entropie sont considérées d'un ordre inférieur aux autres grandeurs acoustiques. La dissipation est donc considérée dans le cadre d'une approximation linéaire et le développement de la pression s'écrit alors :

$$P = P_0 + A \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) + \frac{B}{2} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial s} \right)_{s_0, \rho} (s - s_0), \quad (1.14)$$

où

$$A = \rho_0 \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0, s} = \rho_0 c_0^2 \quad \text{et} \quad B = \rho_0^2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{\rho_0, s} = 2 \rho_0^2 c_0^3 \left( \frac{\partial c}{\partial P} \right)_{\rho_0, s}. \quad (1.15)$$

$A$  est l'inverse du module de compressibilité adiabatique du fluide et  $B$  traduit les variations de célérité sous l'action d'une variation de pression, à entropie constante<sup>2</sup>.

En utilisant l'équation de l'entropie, le dernier terme de l'équation (1.14) s'écrit<sup>3</sup> :

$$\left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{s_0, \rho} (s - s_0) = -\kappa \left( \frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P} \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \kappa \left( \frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P} \right) \frac{\partial p'}{\partial t}. \quad (1.16)$$

$\kappa$  est le coefficient de conductivité thermique du fluide et  $C_V$  et  $C_P$  sont les capacités calorifiques à volume et à pression constants.

Finalement, l'équation d'état (1.14) s'écrit :

$$p' = A \left( \frac{\rho'}{\rho_0} \right) + \frac{B}{2} \left( \frac{\rho'}{\rho_0} \right)^2 - \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \kappa \left( \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \frac{\partial p'}{\partial t}. \quad (1.17)$$

#### 1.1.1.5. Equation de propagation non linéaire quadratique en pression

Pour établir l'équation de propagation non linéaire en pression, il faut exprimer l'excès de masse volumique  $\rho'$  en fonction de la pression acoustique  $p'$ , à l'aide de l'équation d'état. Comme précédemment, le terme du second ordre est réécrit grâce à l'équation d'état au premier ordre :

$$\rho' = \frac{p'}{c_0^2} - \frac{1}{\rho_0 c_0^4} \frac{B}{2A} p'^2 - \frac{1}{\rho_0 c_0^4} \kappa \left( \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \frac{\partial p'}{\partial t}. \quad (1.18)$$

L'expression (1.18) est introduite dans l'équation de conservation de la masse (1.13), que l'on dérive par rapport au temps.

On soustrait alors à l'équation obtenue la divergence de l'équation (1.10), pour obtenir finalement l'équation de propagation en pression établie par Aanonsen<sup>4</sup> :

$$\left[ \nabla^2 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{b}{c_0^2} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right] p' = - \frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p'^2}{\partial t^2} - \left[ \nabla^2 + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] L. \quad (1.19)$$

où  $b = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \left[ \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) + \kappa \left( \frac{1}{C_v} - \frac{1}{C_p} \right) \right]$  est la constante de temps due à l'absorption, qui groupe les effets visqueux et thermiques.

Le membre de gauche de l'équation (1.19) correspond à l'équation de propagation linéaire dans un fluide absorbant. Le premier terme du membre de droite, qui fait intervenir la dérivée seconde par rapport au temps du carré de la pression, est proportionnel au coefficient de non linéarité du fluide  $\beta$ , défini par<sup>5</sup> :

$$\beta = 1 + \frac{B}{2A}. \quad (1.20)$$

L'expression de ce coefficient traduit la contribution de deux effets physiques à la propagation non linéaire cumulative. La « non linéarité thermodynamique » intervient via le rapport des coefficients du premier et du second ordre du développement de l'équation d'état (1.17). Si ce rapport  $B/A$  dépend du fluide considéré, l'ordre de grandeur est toujours sensiblement le même :  $B/A \approx 10$ .

L'autre contribution au coefficient de non linéarité  $\beta$  provient d'un terme non linéaire de l'équation de conservation de la masse. Elle est usuellement appelée « convection ». Cette dénomination est une source de confusion, car un terme convectif est, en hydrodynamique, associé à un flux. Or ce terme ne s'écrit pas comme un flux<sup>1</sup>. Il traduit l'entraînement du fluide lors du passage de l'onde et il ne dépend pas des propriétés du milieu.

<sup>1</sup> Si l'on introduit la dérivée particulaire de la masse volumique dans l'équation de conservation de la masse, elle s'écrit :  $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ . On remarque alors que sa contribution à la non linéarité cumulative (donnant « 1 » dans la définition du coefficient de non linéarité) ne provient pas du terme convectif de la dérivée particulaire.

Les effets non linéaires couramment observés dans les fluides, tels que la génération d'harmoniques de la fréquence émise ou l'interaction d'ondes sont des effets cumulatifs qui sont modélisés par le terme non linéaire de l'équation (1.19) proportionnel au coefficient  $\beta$ .

L'autre terme non linéaire de l'équation (1.19) est composé d'un opérateur, qui à un signe près ressemble au d'Alembertien, appliqué à la densité lagrangienne d'énergie. Il provient des termes convectifs de la dérivée particulaire dans les équations de conservation de la masse et de Navier-Stokes. Au second ordre, la densité lagrangienne d'énergie est nulle pour une onde plane. Dans le cas contraire, elle tend de toute façon à s'annuler, car en champ lointain, l'onde tend à être localement plane. Plus généralement, le principe de moindre action stipule que l'intégrale temporelle de la densité lagrangienne d'énergie doit être minimale au cours d'un mouvement<sup>6</sup>. Ce terme ne décrit donc pas un processus non linéaire cumulatif, ce qui lui vaut la dénomination de non linéarité locale<sup>7</sup>.

On retrouve ce terme local dans les relations non linéaires entre les grandeurs acoustiques. Par exemple, en négligeant la viscosité dans l'équation (1.10), la pression s'exprime en fonction du potentiel acoustique et de la densité lagrangienne d'énergie :

$$p' = \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} - L. \quad (1.21)$$

Si l'onde acoustique considérée est émise par une source directive, les effets non linéaires cumulatifs dominent rapidement ceux dus à ce terme local.

Nous verrons par ailleurs que ces termes non linéaires locaux jouent un rôle dans l'expression de la pression de radiation (cf. 1.2 ).

#### 1.1.1.6. Equation de Westervelt

L'équation de propagation (1.19) est générale. Si la distance de propagation est supérieure à quelques longueurs d'ondes, loin d'une interface, les effets non linéaires cumulatifs dominent les effets non linéaires locaux. Nous obtenons alors l'équation de Westervelt<sup>8</sup> :

$$\left[ \nabla^2 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{b}{c_0^2} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right] p' = - \frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p'^2}{\partial t^2}. \quad (1.22)$$

Dans le cas d'une onde plane, pour laquelle, en régime linéaire, la densité d'énergie cinétique est égale à la densité d'énergie potentielle, cette équation est rigoureusement valable au second ordre.

### 1.1.2. Conséquences sur la propagation d'une onde plane

Nous rappelons ici quelques effets connus de la propagation non linéaire dans le cas simple d'une onde plane.

#### 1.1.2.1. Equation de Burgers

Pour décrire la propagation non linéaire d'une onde plane dans un fluide, l'équation de Westervelt peut être factorisée :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{b}{2c_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\beta}{\rho_0 c_0^3} p' \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{b}{2c_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\beta}{\rho_0 c_0^3} p' \frac{\partial}{\partial t} \right] p' = 0. \quad (1.23)$$

Chacun des opérateurs correspond alors à l'équation de Burgers, décrivant la propagation vers les  $z$  négatifs et positifs.

En ne considérant que la propagation dans le sens  $z > 0$ , l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{b}{2c_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0, \quad (1.24)$$

où la vitesse du son en régime non linéaire  $c$  est une fonction de la surpression acoustique :

$$c(p') \cong c_0 \left( 1 + \frac{\beta}{\rho_0 c_0^2} p' \right). \quad (1.25)$$

$c$  s'écrit encore :

$$c = c_0 \left( 1 + \beta \varepsilon \frac{p'}{p'_0} \right), \quad (1.26)$$

où  $p'_0$  est l'amplitude de l'onde de pression à la source.

$\varepsilon = \frac{p'_0}{\rho_0 c_0^2} = \frac{v_0}{c_0}$  est le nombre de Mach acoustique, rapport de l'amplitude de la vitesse

particulière sur la vitesse du son en régime linéaire.  $\varepsilon$  donne l'ordre de grandeur de la perturbation acoustique.

### 1.1.2.2. Propagation non linéaire d'une onde plane harmonique dans un fluide parfait

Dans un fluide parfait, la solution harmonique implicite de l'équation de Burgers (solution de Poisson) s'écrit :

$$p' = p'_0 \sin \omega \left( t - \frac{z}{c(p')} \right), \quad (1.27)$$

où  $\omega = 2\pi f$  est la pulsation de l'onde.

Grâce à la relation (1.25), nous pouvons interpréter l'effet du terme non linéaire cumulatif de l'équation d'onde. Le fluide, initialement au repos, est perturbé par le passage de l'onde. Cette dernière « voit » donc le milieu modifié par sa propagation. Comme les surpressions se propagent plus vite que les détentes, la forme d'une onde harmonique est déformée progressivement, de façon cumulative, au fur et à mesure qu'elle se propage (cf. figure 1.1.a). Cette distorsion se traduit spectralement par l'apparition, en cascade<sup>II</sup>, de fréquences multiples de la fréquence fondamentale (le signal reste périodique). L'amplitude de la raie spectrale à la fréquence fondamentale diminue en raison du transfert d'énergie vers les harmoniques, dont l'amplitude et le nombre croissent avec la distance de propagation tant qu'un choc n'est pas formé (cf. figure 1.1.b).

En introduisant le temps retardé  $\tau = t - z/c_0$  et en supposant que le nombre de Mach acoustique  $\mathcal{E}$  est très petit devant l'unité, l'équation (1.27) s'écrit :

$$p' = p'_0 \sin \omega \left( \tau + \frac{\beta \mathcal{E} p'}{c_0 p'_0} z \right). \quad (1.28)$$

L'expression du temps retardé en fonction de la pression est donc :

$$\omega \tau = \sin^{-1} \left( \frac{p'}{p'_0} \right) - \frac{\beta \mathcal{E} p' \omega}{c_0 p'_0} z. \quad (1.29)$$

L'équation (1.29) montre qu'une discontinuité apparaît dans la forme d'onde à partir d'une distance de propagation caractéristique  $L_c$ , appelée distance de formation du choc :

$$L_c = \frac{1}{k \beta \mathcal{E}}, \quad (1.30)$$

où  $k = \omega/c_0$  est le nombre d'onde.

---

<sup>II</sup> La cascade vers toutes les fréquences harmoniques de  $f$  est imposée par la nature quadratique de la non linéarité.



$L_c$  est la distance caractéristique des effets non linéaires. Elle diminue lorsque le coefficient de non linéarité du fluide, la fréquence de l'onde ou l'amplitude d'émission augmentent. En toute rigueur, rendre linéaires les équations fondamentales de l'acoustique n'est possible que si la distance de propagation est bien inférieure à la distance de choc<sup>III</sup>.

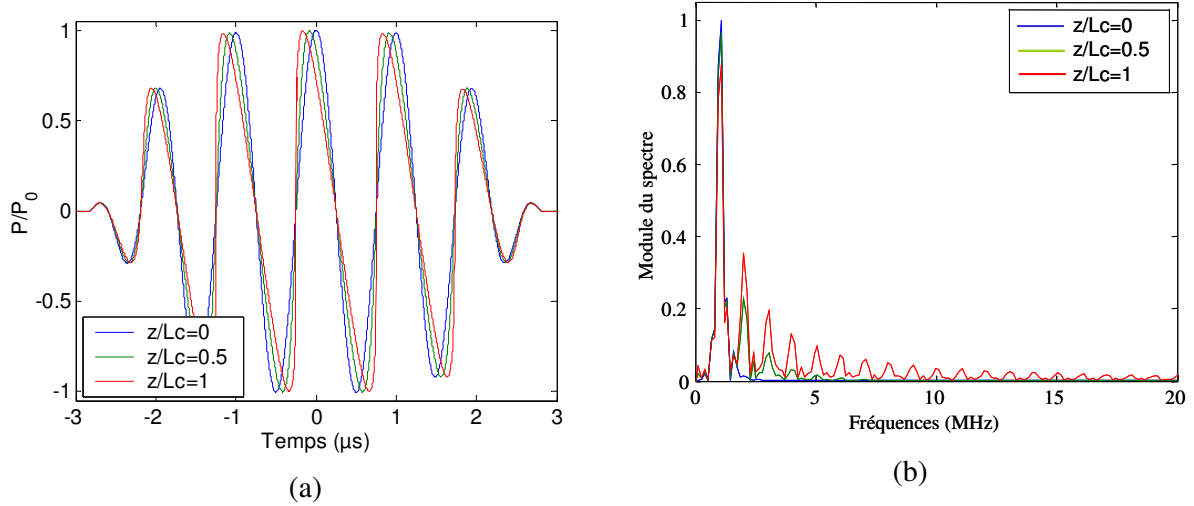


Figure 1.1 : Propagation non linéaire d'une onde plane dans un fluide parfait.

(a) Pression acoustique à différentes distances de propagation.

(b) Spectres aux mêmes distances.

Au delà de  $L_c$ , la solution implicite de Poisson est à valeurs multiples, ce qui n'est pas acceptable physiquement. Pour modéliser la forme d'onde, il est donc nécessaire d'introduire des chocs raccordant les branches multivaluées de la solution de Poisson. La position de ces discontinuités peut être déterminée grâce à la théorie des chocs faibles<sup>9</sup> ou à l'aide de la loi des aires égales<sup>10</sup>. Le passage du choc se traduit par une discontinuité de première espèce des grandeurs thermodynamiques caractérisant l'état du fluide. En particulier, le choc impose l'existence d'un saut d'entropie, qui montre qu'il est le lieu d'un mécanisme de dissipation, même dans un fluide parfait. Ce phénomène est appelé « extra atténuation non linéaire ». Physiquement, la pente très élevée (infinie en théorie) de la forme d'onde en pression au niveau du choc correspond dans le domaine spectral à des harmoniques de fréquences très élevées, associées à des longueurs d'ondes très courtes. Dans un gaz parfait, certaines longueurs d'ondes créées sont inférieures au libre parcours moyen des molécules. A ces fréquences, il n'y a plus de mouvement oscillatoire d'ensemble des molécules : l'énergie mécanique de l'onde est dissipée sous forme d'agitation thermique. Dans un liquide, il est

<sup>III</sup> La distance de formation du choc prend en compte le caractère cumulatif des effets non linéaires.

plus réaliste de prendre en considération l'absorption thermo-visqueuse qui limite alors la pente du choc.

Le saut d'entropie est proportionnel au cube de la variation de pression à travers le choc. Comme la constante de proportionnalité est positive et comme l'entropie d'un fluide en mouvement ne peut qu'augmenter en vertu du second principe de la thermodynamique, seul un choc de compression peut exister<sup>10, 11</sup>.

### 1.1.2.3. Propagation non linéaire d'une onde plane dans un fluide thermo-visqueux

Dans un fluide absorbant, la propagation linéaire d'une onde acoustique harmonique se traduit par une décroissance exponentielle de son amplitude avec la distance de propagation :

$$p' = p'_0 e^{-\alpha z} \sin \omega \left( t - \frac{z}{c_0} \right). \quad (1.31)$$

Le coefficient d'atténuation  $\alpha > 0$  (en Np/m) est proportionnel au coefficient d'absorption du fluide et au carré de la fréquence de l'onde :  $\alpha = \frac{b\omega^2}{2c_0}$ . Dans l'eau,  $\alpha \cong 24 \times 10^{-15} f^2$ . La

distance caractéristique  $L_a$  de l'effet d'atténuation est l'inverse du coefficient  $\alpha$  :  $L_a = \frac{1}{\alpha}$ .

Comme l'atténuation transforme peu à peu l'énergie mécanique de l'onde en chaleur, elle est susceptible de limiter les effets non linéaires, dont l'importance augmente avec l'amplitude de l'onde. De plus, si des harmoniques de la fréquence initiale sont créées, elles sont atténuées plus vite que la fréquence fondamentale.

Afin de rendre compte de l'antagonisme des effets de la non linéarité et de l'absorption, le nombre de Gol'dberg  $\Gamma$  est couramment utilisé. Il compare leurs distances caractéristiques respectives :

$$\Gamma = \frac{L_a}{L_c} = \frac{\beta k \epsilon}{\alpha}. \quad (1.32)$$

Si  $\Gamma$  est comparable ou supérieur à l'unité, la propagation est fortement non linéaire. Si  $\Gamma$  est petit devant un, l'atténuation domine les effets non linéaires. En particulier, la propagation de l'onde ne peut pas donner naissance à un choc. C'est le cadre de l'approximation de faible non linéarité (ou approximation quasi-linéaire), qui permet de résoudre l'équation de propagation non linéaire en perturbation.

#### 1.1.2.4. Approximation quasi-linéaire

Quand les effets non linéaires restent faibles (en raison de l'atténuation de l'onde par exemple), il est possible de les traiter comme une correction à la propagation linéaire. Cette approximation quasi-linéaire permet de résoudre l'équation de propagation à l'aide d'une méthode de perturbation. Toute grandeur physique  $Q$  décrivant la propagation non linéaire de l'onde est alors développée en puissance du nombre de Mach  $\varepsilon$  :

$$Q = \varepsilon Q' + \varepsilon^2 Q'' . \quad (1.33)$$

$Q'$  et  $Q''$  représentent respectivement l'onde primaire émise par la source et l'onde secondaire créée par la propagation non linéaire.

En introduisant le développement (1.33) dans l'équation de Burgers (1.24), cette dernière donne naissance à deux équations linéaires couplées, aux ordres  $\varepsilon$  et  $\varepsilon^2$  :

$$\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{b}{2c_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \quad (1.34.a)$$

$$\frac{\partial p''}{\partial z} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial p''}{\partial t} - \frac{b}{2c_0} \frac{\partial^2 p''}{\partial t^2} = \frac{\beta}{\rho_0 c_0^3} p' \frac{\partial p'}{\partial t} . \quad (1.34.b)$$

L'onde primaire est alors solution de l'équation de propagation linéaire en milieu absorbant. Elle joue le rôle de source de l'onde secondaire, solution d'une équation de propagation linéaire avec second membre. Physiquement, cette approximation revient à considérer que l'énergie extraite par pompage vers les harmoniques est négligeable devant celle dissipée par l'atténuation.

#### Génération de la seconde harmonique :

Considérons une source monochromatique :

$$p'(z=0, t) = p_0 \cos(\omega t) . \quad (1.35)$$

En introduisant le temps retardé  $\tau = t - z/c_0$  l'équation (1.34.b) devient :

$$\frac{\partial p''}{\partial z} - \frac{b}{2c_0^3} \frac{\partial^2 p''}{\partial \tau^2} = \frac{\beta}{\rho_0 c_0^3} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} . \quad (1.36)$$

Avec la condition de source (1.35), l'onde secondaire à la fréquence  $2f$  s'écrit alors :

$$p''(\tau, z) = \frac{\beta k p_0^2}{2\rho_0 c_0^2 \alpha} e^{-\alpha_{2f} z} (1 - e^{-2\alpha z}) \sin(2\omega\tau). \quad (1.37)$$

$\alpha_{2f}$  est le coefficient d'atténuation de la seconde harmonique. Si la distance de propagation est telle que  $2\alpha z \ll 1$ , l'amplitude de la seconde harmonique croît linéairement avec  $z$ , ce qui traduit le caractère cumulatif de la propagation non linéaire :

$$p''(\tau, z) = \frac{\beta k p_0^2}{\rho_0 c_0^2} z \sin(2\omega\tau). \quad (1.38)$$

On retrouve alors l'expression connue dans un fluide parfait.

La figure 1.2.a montre la décroissance exponentielle de l'amplitude d'une onde plane de fréquence  $f = 10$  MHz (émise à  $p_0 = 50$  kPa) en fonction de sa distance de propagation dans l'eau. L'évolution de l'amplitude de la seconde harmonique est représentée sur la figure 1.2.b. Nulle à la source, elle croît d'abord linéairement avec la distance de propagation, puis elle est fortement atténuée. L'évolution de l'amplitude de la seconde harmonique est bien sûr conditionnée par la fréquence de l'onde primaire. La fréquence choisie ici, à laquelle l'atténuation devient rapidement prépondérante, est celle du dispositif expérimental utilisé au chapitre deux.

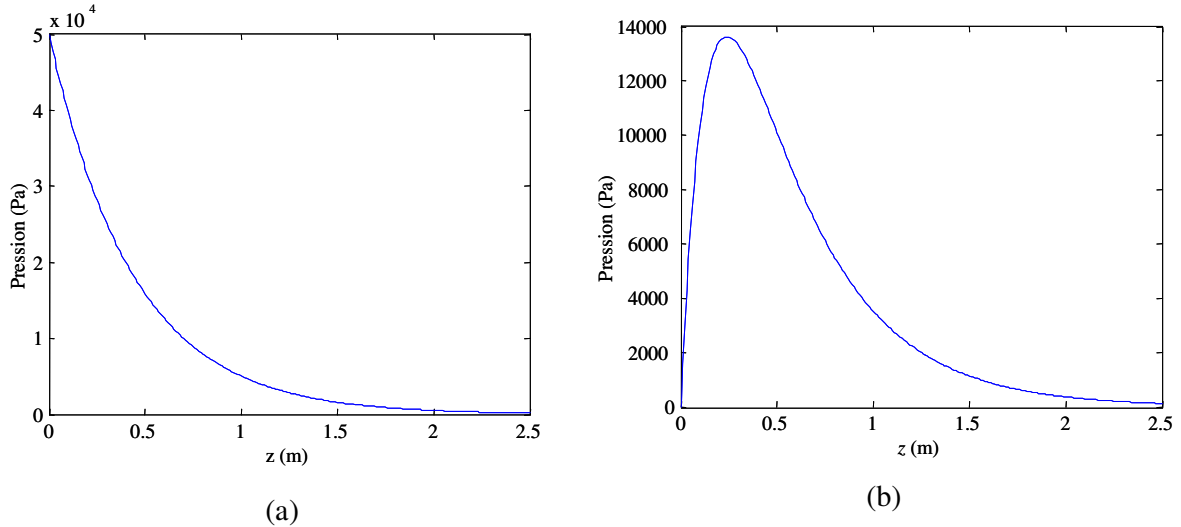


Figure 1.2 : Amplitude des composantes de la pression acoustique en fonction de la distance de propagation lorsqu'une onde plane de fréquence  $f = 10$  MHz et d'amplitude 50 kPa est émise dans l'eau.  
(a) Onde primaire. (b) Seconde harmonique, d'après l'équation (1.37).

Interaction non linéaire d'ondes planes :

Supposons que deux ondes de fréquences respectives  $f_1$  et  $f_2$  soient initialement émises par la source :

$$p'(z=0, \tau) = p_{01} \cos(\omega_1 \tau) + p_{02} \cos(\omega_2 \tau). \quad (1.39)$$

La solution de l'équation de propagation linéaire (1.34.a) est alors donnée par le principe de superposition :

$$p'(z, \tau) = p_{01} e^{-\alpha_1 z} \cos(\omega_1 \tau) + p_{02} e^{-\alpha_2 z} \cos(\omega_2 \tau). \quad (1.40)$$

Le second membre de l'équation (1.34.b) s'écrit alors :

$$S(\tau, z) = \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^2} \left[ k_1 p_{01}^2 e^{-2\alpha_1 z} \sin(2\omega_1 \tau) + k_2 p_{02}^2 e^{-2\alpha_2 z} \sin(2\omega_2 \tau) \right. \\ \left. + e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)z} (k_+ p_{01} p_{02} \sin(\omega_+ \tau) + k_- p_{01} p_{02} \sin(\omega_- \tau)) \right]. \quad (1.41)$$

En plus des secondes harmoniques aux fréquences  $2f_1$  et  $2f_2$ , deux composantes aux fréquences somme et différence sont donc créées au cours de la propagation ( $\omega_{\pm} = \omega_1 \pm \omega_2$ ,  $k_{\pm} = (\omega_1 \pm \omega_2)/c_0$ ).

Cette interaction paramétrique traduit l'effet sur une des ondes primaires de la perturbation du milieu induite par la propagation de l'autre et réciproquement.

Les expressions des pressions secondaires  $p_+''$  et  $p_-''$  associées à ces composantes aux fréquences somme et différence sont les suivantes :

$$p_{\pm}''(\tau, z) = \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^2} p_{01} p_{02} k_{\pm} e^{-\alpha_{\pm} z} \frac{(1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_{\pm})z})}{\alpha_{\pm} - (\alpha_1 + \alpha_2)} \sin(\omega_{\pm} \tau). \quad (1.42)$$

Pour des distances telles que l'atténuation est négligeable, il vient :

$$p_{\pm}''(\tau, z) = \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^2} p_{01} p_{02} k_{\pm} z \sin(\omega_{\pm} \tau). \quad (1.43)$$

La figure 1.3 montre l'évolution, en fonction de la distance de propagation  $z$ , des composantes primaires et secondaires de la pression ( $p_1''$ ,  $p_2''$ ,  $p_+''$  et  $p_-''$ ), lorsque deux ondes planes de fréquences  $f_1 = 10$  MHz et  $f_2 = 9$  MHz sont émises conjointement dans l'eau avec une amplitude de 50 kPa. Sur la figure 1.3.a, les amplitudes des ondes primaires décroissent exponentiellement avec la distance de propagation : leurs comportements sont similaires puisque les fréquences sont proches. En revanche, les amplitudes des ondes aux fréquences somme et différence ont un comportement sensiblement différent (cf. figure 3.b). Nulles à la source, elles augmentent d'abord linéairement avec la distance de propagation. Comme leur

amplitude est proportionnelle à leur pulsation, celle de la composante à la fréquence somme croît plus rapidement. Lorsque les effets de l'absorption ne sont plus négligeables, la composante à la fréquence somme est rapidement atténuée. L'atténuation de la composante à la fréquence différence est évidemment bien plus lente. Lorsque les fréquences des deux ondes primaires sont très proches, l'atténuation de la composante à la fréquence différence peut être négligée. L'amplitude de cette composante croît alors jusqu'à une valeur limite, imposée par la longueur d'atténuation des ondes primaires, puis elle reste constante. Le niveau de la composante de basse fréquence rapporté à l'amplitude d'émission, appelé aussi rendement paramétrique, est généralement assez faible : il est inférieur à 5% dans le cas illustré ci-dessous. Or les effets de diffraction, ignorés ici, diminuent encore ce rendement. Néanmoins, en considérant la diffraction, l'intérêt pratique de l'émission paramétrique se révèle, puisque celle-ci permet d'obtenir un faisceau de basse fréquence remarquablement directif, grâce aux sources en volume que crée la propagation des ondes primaires.

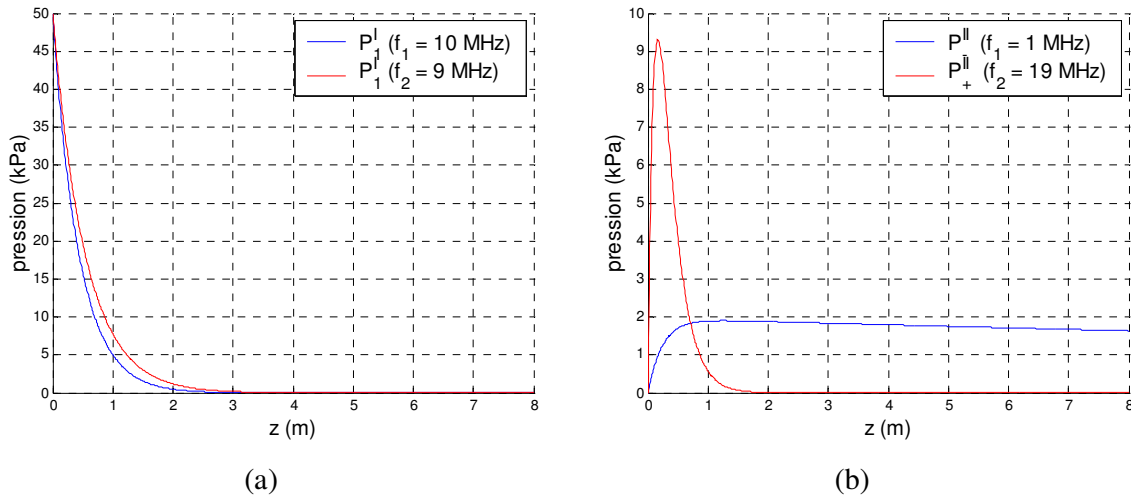


Figure 1.3 : Evolution de composantes de la pression en fonction de la distance à la source, lorsque deux ondes planes de fréquences  $f_1 = 10$  MHz et  $f_2 = 9$  MHz sont émises conjointement dans l'eau, avec une amplitude de 50 kPa.

(a) Composantes primaires. (b) Composantes secondaires aux fréquences somme et différence.

### 1.1.3. Diffraction et propagation non linéaire

#### 1.1.3.1. Nombre de Khokhlov

Les sources acoustiques étant de taille finie, la diffraction des ondes émises doit être prise en compte. En régime harmonique, la diffraction est caractérisée en champ proche par un régime interférentiel lié au confinement du faisceau acoustique autour de l'axe de

propagation. En champ lointain, le faisceau cesse d'être directif et diverge. Pour un transducteur plan en forme de disque, la limite entre les champs proche et lointain est donnée par la distance de Rayleigh  $L_d$  :

$$L_d = \frac{kr^2}{2}, \quad (1.44)$$

où  $r$  est le rayon de la source et  $k$  est le nombre d'onde.  $L_d$  est d'autant plus grande que la longueur d'onde du faisceau est petite et que le rayon du transducteur est grand.

Comme en champ lointain la diffraction élargit le faisceau acoustique, l'amplitude de l'onde suivant une direction donnée diminue à mesure qu'elle se propage. Comme l'atténuation, la diffraction est donc susceptible de limiter l'importance des effets non linéaires. Le nombre de Khokhlov est le rapport des distances caractéristiques des effets de la diffraction et de la non linéarité.

Pour un transducteur circulaire plan, il s'écrit :

$$\kappa = \frac{L_d}{L_c} = \frac{k^2 r^2 \beta \epsilon}{2}. \quad (1.45)$$

Si  $\kappa$  est bien inférieur à l'unité, les effets de diffraction imposent une propagation faiblement non linéaire. Dans le cas contraire, le régime de propagation est fortement non linéaire.

Si la propagation a lieu dans un milieu atténuant, la comparaison de la longueur d'atténuation à la distance de Rayleigh indique qui, du paramètre de Gol'dberg ou du nombre de Khokhlov, est pertinent.

#### 1.1.3.2. Equation KZK

La résolution analytique de l'équation de propagation non linéaire (1.19) ne se fait qu'au prix d'approximations, comme les hypothèses d'onde plane ou de propagation quasi-linéaire évoquées précédemment. Pour étudier l'influence de la diffraction dans un régime de propagation plus fortement non linéaire, le recours à la simulation numérique est nécessaire. Dans le cas de sources acoustiques assez directives, on utilise généralement l'équation « KZK » (Khokhlov- Zabolotskaya- Kuznetsov), qui résulte d'une approximation paraxiale de l'équation générale (1.19)<sup>12,13</sup>.

Supposons qu'une onde engendrée par une source directive se propage globalement dans la direction  $z > 0$ . En introduisant le temps retardé  $\tau = t - z/c_0$  dans l'équation (1.19) et en négligeant le terme non linéaire local, l'équation KZK s'écrit :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial z \partial \tau} = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p' + \frac{b}{2c_0^3} \frac{\partial^3 p'}{\partial \tau^3} + \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 p'^2}{\partial \tau^2}. \quad (1.46)$$

La diffraction est alors modélisée par l'opérateur « Laplacien transversal »  $\Delta_{\perp} = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ , qui est appliqué aux plans perpendiculaires à l'axe  $z$  du faisceau. La modélisation des effets de l'absorption et de la non linéarité ne change pas par rapport à l'équation (1.19).

L'équation (1.46) a été résolue numériquement dans les domaines spectral<sup>4</sup> et temporel<sup>14</sup>. Au second chapitre, nous utilisons une résolution numérique de l'équation KZK écrite en potentiel (développée par François Coulouvrat et Régis Marchiano de l'institut Jean Le Rond d'Alembert) pour étudier l'auto-démodulation non linéaire et son lien avec la pression de radiation au sens de Rayleigh.

#### 1.1.4. Propagation non linéaire dans le formalisme de Lagrange

La propagation non linéaire des ondes acoustiques dans les fluides a été introduite ici suivant l'usage qui consiste à décrire la propagation en termes de variations de pression (quantité physique la plus mesurée en acoustique) dans les variables d'Euler (c'est-à-dire avec la description de l'espace la plus intuitive). Toutefois, le choix de cette grandeur acoustique ne permet pas de rendre compte de la totalité des phénomènes non linéaires affectant la propagation d'une onde. En particulier, elle passe sous silence la génération d'un déplacement statique cumulatif, encore appelé rectification acoustique. Nous cherchons donc ici à décrire la propagation non linéaire d'une onde plane harmonique, en termes de déplacement. Il est alors naturel d'utiliser les variables de Lagrange. En régime non linéaire, les descriptions d'Euler et de Lagrange conduisent à des expressions différentes de l'équation de propagation.

##### 1.1.4.1. Equation de propagation du déplacement

Dans cette partie, nous considérons la propagation d'une onde acoustique plane dans un fluide parfait<sup>IV</sup> et nous écrivons les équations d'Euler et d'état en fonction du déplacement  $U$ , selon une démarche proche de celle suivie par Thurston<sup>15</sup>.

<sup>IV</sup> La différence entre les descriptions d'Euler et de Lagrange ne vient que de la non linéarité.



Dans les variables de la description courante, l'équation d'Euler à une dimension s'écrit :

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p'}{\partial z}. \quad (1.47)$$

Passer des variables d'Euler  $(\vec{x}, t)$  à celles de Lagrange  $(\vec{a}, t)$  (et réciproquement) est possible

grâce au tenseur « gradient de la transformation », défini par :  $\overline{\overline{F}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{a}}$ . Le déplacement

s'écrivant  $\vec{U} = \vec{x} - \vec{a}$ , les composantes du tenseur  $\overline{\overline{F}}$  sont :  $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial U_i}{\partial a_j}$ .

Comme  $\det \overline{\overline{F}} = \frac{\rho_0}{\rho}$ , l'équation (1.47) devient :

$$\rho_0 \frac{d^2 U}{dt^2} = -\frac{\partial p'}{\partial a}. \quad (1.48)$$

Il faut alors exprimer la surpression eulerienne  $p'$  en fonction du déplacement.

L'équation de conservation de la masse est :

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \det \overline{\overline{F}} = \left( 1 + \frac{\partial U}{\partial a} \right). \quad (1.49)$$

L'expression (1.49) est développée au second ordre  $O(\varepsilon^2)$ , puis introduite dans l'équation d'état (1.14) :

$$p' = A \left( -\frac{\partial U}{\partial a} + \left( \frac{\partial U}{\partial a} \right)^2 \right) + \frac{B}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial a} \right)^2. \quad (1.50)$$

En combinant les relations (1.48) et (1.50), nous obtenons finalement l'équation de propagation non linéaire d'une onde plane en variables de Lagrange :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 2\beta \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} \frac{\partial U}{\partial a}. \quad (1.51)$$

Dans cette description, le terme non linéaire provient uniquement du membre de droite de l'équation d'Euler (1.48). Néanmoins, on retrouve dans l'équation (1.51) le coefficient de non linéarité  $\beta$ , ce qui montre que les origines convective et thermodynamique des effets non linéaires cumulatifs sont toutes deux modélisées (elles apparaissent dans l'équation d'état 1.50). Dans cette équation valable pour les ondes planes, il n'y a évidemment pas de terme non linéaire local.

#### 1.1.4.2. Déplacement statique

Si on se limite à la propagation dans le sens  $a > 0$ , l'équation (1.51) s'écrit :

$$\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{1}{c_0} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\beta}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial a} \right)^2. \quad (1.52)$$

Cette équation est formellement proche de l'équation de Burgers non dissipative (équation (1.23) avec  $b = 0$ ), à la différence importante que le terme non linéaire fait intervenir le carré du gradient du déplacement et non la dérivée d'un terme quadratique.

Dans le cadre de l'approximation quasi-linéaire<sup>V</sup>, le déplacement est développé suivant la relation (1.33) ( $U = \varepsilon U' + \varepsilon^2 U''$ ), puis introduit dans l'équation de propagation (1.52), suivant la méthode en perturbation déjà mentionnée (cf. 1.1.2.4).

Pour une source monochromatique, de fréquence  $f_0$  et d'amplitude  $U_0$ , l'onde primaire s'écrit à l'aide du temps retardé  $\tau = t - a/c_0$  :

$$U'(a, \tau) = U_0 \cos(\omega_0 \tau). \quad (1.53)$$

Les ondes secondaires sont alors solutions de l'équation :

$$\frac{\partial U''}{\partial a} = \frac{\beta}{2c_0^2} \left( \frac{\partial U'}{\partial \tau} \right)^2 = \frac{\beta k_0^2}{4} U_0^2 (1 + \cos(2\omega_0 \tau)), \quad (1.54)$$

où  $k_0$  est le nombre d'onde associé à la fréquence  $f_0$ . Après intégration, il vient<sup>16</sup> :

$$U''(a, \tau) = \frac{\beta k_0^2}{4} a U_0^2 [1 + \cos(2\omega_0 \tau)]. \quad (1.55)$$

Cette expression diffère de celle obtenue pour la pression secondaire à partir de l'équation de Burgers (cf. (1.38)). Du point de vue du déplacement de la particule, la propagation non linéaire d'une onde plane harmonique engendre non seulement une onde à la fréquence double, mais aussi un déplacement statique, qui s'écrit :

$$U_s(a) = \frac{1}{4} \beta k_0^2 U_0^2 a. \quad (1.56)$$

$U_s$  est aussi cumulatif : plus la position à l'équilibre de la particule considérée est loin de la source, plus il est important.

<sup>V</sup> Lorsqu'une onde plane se propage dans un fluide parfait, rien n'est susceptible de limiter les effets non linéaires au cours de la propagation. Se placer dans le cadre de l'approximation quasi-linéaire revient donc à considérer que la distance de propagation est petite devant la distance de formation du choc.

Comme la seconde harmonique, ce déplacement statique peut être interprété comme le produit de l'interaction non linéaire de deux ondes de fréquences égales. Néanmoins, l'équation de Burgers écrite pour la pression ne met pas son existence en évidence. Le terme non linéaire de l'équation de Westervelt est en effet proportionnel à la dérivée temporelle du carré de la pression, ce qui est incompatible avec l'existence d'un terme source statique.

#### 1.1.4.3. Déplacements eulerien et lagrangien

Les expressions d'une quantité en variables d'Euler et de Lagrange diffèrent. Si l'on note  $u(z, t)$  le déplacement dans les variables d'Euler, l'équation (1.3) impose :

$$u(z, t) = U(a = z, t) - U \left[ \frac{\partial U}{\partial a} \right]_{a=z}. \quad (1.57)$$

Dans le cadre de l'approximation quasi-linéaire, le principe de superposition reste valable. Le déplacement  $U$  est alors la somme des composantes primaire et secondaire  $U^I$  et  $U^{II}$  définies par les relations (1.53) et (1.55). En introduisant cette somme dans l'équation (1.57), il vient au second ordre :

$$u(z, t) = U_0 \sin(\omega_0 t - k_0 z) + \frac{U_0^2}{4} \beta k_0^2 z [1 + \cos(2\omega_0 t - 2k_0 z)] - \frac{k_0 U_0^2}{2} \sin(2\omega_0 t - 2k_0 z). \quad (1.58)$$

La différence  $\Delta u = u - U$  :

$$\Delta u = u(z, t) - U(a = z, t) = -\frac{k_0 U_0^2}{2} \sin(2\omega_0 t - 2k_0 z) \quad (1.59)$$

est non linéaire, mais non cumulative.

Le rapport  $R$  du déplacement statique  $U_s$  et du maximum de la valeur absolue de  $\Delta u$  est :

$$R = \frac{U_s(a = z)}{\max(|\Delta u|)} = \frac{1}{2} k_0 \beta z. \quad (1.60)$$

Il augmente linéairement avec la distance de propagation  $z$ . Pour une distance égale à une longueur d'onde,  $R$  vaut  $\pi \beta$  : dans l'eau, il est alors à peu près égal à 10. L'amplitude de la différence  $\Delta u$  est donc rapidement très inférieure à celle du déplacement statique engendré par la propagation.

La différence entre les expressions d'une quantité dans les variables d'Euler et de Lagrange est un terme du second ordre non cumulatif. Elle devient donc négligeable devant les

composantes engendrées par les effets non linéaires cumulatifs, dès que la distance de propagation est supérieure à quelques longueurs d'ondes, comme le sont les non linéarités locales intervenant dans l'équation (1.19), auxquelles elles sont liées. Dans le cas où la quantité étudiée n'est pas cumulative (comme l'excès moyen de pression intervenant dans la pression de radiation de Rayleigh –cf. 1.2.), cette différence doit être considérée.

## 1.2. Pressions de radiation dans un fluide parfait

### 1.2.1. Introduction historique : pressions de radiation lumineuse et acoustique

Le concept de pression de radiation a été introduit avec la théorie de l'électromagnétisme, développée par Maxwell en 1873<sup>VI</sup>. Maxwell a montré qu'un conducteur plan parfait émettant une onde plane subit une force de réaction par unité de surface égale à la densité d'énergie totale de l'onde émise. A l'inverse une onde, de densité d'énergie totale  $W$  se propageant perpendiculairement à un obstacle plan parfaitement absorbant exerce sur ce dernier par une pression de radiation<sup>VI</sup> égale à  $W^{\text{VII}}$ . A partir de ce concept, Maxwell a introduit le tenseur des contraintes électromagnétiques  $\overline{\sigma}$ , dont l'expression dans le vide est la suivante:

$$\sigma_{ik} = \left( \epsilon_0 E_i E_k - \epsilon_0 \frac{|\vec{E}|^2}{2} \delta_{ik} \right) + \left( \frac{1}{\mu_0} B_i B_k - \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} \delta_{ik} \right). \quad (1.61)$$

$E_i$  et  $B_i$  sont les composantes selon l'axe  $i$  des champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$ .  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  sont respectivement la permittivité et la perméabilité diélectrique du vide.

La force exercée sur un obstacle est égale à l'intégrale sur une surface fermée  $S$  de la valeur moyenne temporelle du tenseur des contraintes électromagnétiques :

$$\vec{F} = \int_S \left\langle \overline{\sigma} \right\rangle_{t_0} \vec{dS}. \quad (1.62)$$

<sup>VI</sup> On parle aussi de « pression de rayonnement ». La terminologie « radiation » est choisie ici pour souligner l'analogie avec l'acoustique.

<sup>VII</sup> Notons que le concept de pression de radiation a été introduit à l'époque où l'on supposait que les ondes électromagnétiques se propageaient à travers un milieu matériel : l'éther.

Si une onde électromagnétique plane se propage dans le vide selon l'axe  $z$  ( $i = 3$ ), la projection sur cet axe de la force se manifestant sur l'obstacle est alors :

$$F_3 = - \int_S \langle W \rangle_{T_0} \vec{dS}, \quad (1.63)$$

où  $W$  est la densité d'énergie électromagnétique de l'onde :  $W = \epsilon_0 \frac{|\vec{E}|^2}{2} + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}$ .

Les composantes selon les axes 1 et 2 (perpendiculaires à la normale à la surface, orientée vers l'intérieur) sont :

$$F_1 = + \int_S \left\langle \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \right\rangle_{T_0} \vec{dS} \text{ et } F_2 = + \int_S \left\langle \frac{B^2}{2\mu_0} \right\rangle_{T_0} \vec{dS}. \quad (1.64)$$

La force de radiation électromagnétique est donc un phénomène non linéaire, puisqu'elle fait intervenir le carré des champs électrique et magnétique.

On peut interpréter cette force de radiation d'un point de vue corpusculaire : le flux de photons constituant le faisceau lumineux transfère une quantité de mouvement à la matière, lorsque ces photons sont absorbés par une interface. Si cette quantité de mouvement est rapportée à une unité de temps et à une unité de surface, ce transfert est alors homogène à une pression.

Cet effet fut détecté expérimentalement en Russie par Lebedev en 1901 à l'aide d'une simple lampe à arc focalisée<sup>18</sup>, puis aux Etats-unis par Nichols et Hull en 1903<sup>19</sup>.

Une manifestation macroscopique de la pression de radiation électromagnétique est l'orientation opposée au Soleil de la queue des comètes<sup>VIII</sup> (cf. figure 1.4). Quand une comète arrive à proximité du soleil, la glace de son noyau s'évapore et forme un nuage de poussière, appelé « chevelure », qui s'étire au fur et à mesure qu'elle approche du soleil et peut ainsi atteindre plusieurs millions de kilomètres. Sur la figure 1.4, la flèche rouge donne le sens de la trajectoire de la comète. La « chevelure » ne traîne donc pas dans son sillage (elle n'est pas orientée suivant un sens opposé à la flèche rouge), mais elle possède une orientation propre. On peut également noter la présence de deux queues distinctes, l'une droite et l'autre courbée. La première queue (flèche jaune) est constituée de particules ionisées poussées par le vent solaire. Les ions étant très légers, ce phénomène est rapide et la queue, rectiligne, pointe dans le sens opposé à la direction du soleil (la flèche jaune pointe donc vers le soleil). La seconde

<sup>VIII</sup> Ceci concernent les particules neutres (flèche bleue sur la figure 2.1.). Pour les particules chargées, c'est le vent solaire plutôt que la pression de radiation qui agit sur l'orientation de la queue.

queue (flèche bleue) est formée de particules de poussière, neutres et plus lourdes, qui sont également poussées par la pression de radiation du soleil. Néanmoins, comme leur masse est plus importante, ce phénomène est plus lent et se trouve affecté par la trajectoire de la comète. Ainsi, l'effet résultant est à peu de chose près la somme des deux contributions : le mouvement de la comète et la pression des photons sur les particules de poussière.



Figure 1.4 : Photographie illustrant l'effet de la pression de radiation solaire sur la « queue » d'une comète.

La propulsion de véhicules spatiaux grâce à la pression de radiation induite par le rayonnement solaire a été imaginée très rapidement par des auteurs de science-fiction. En effet, dès 1889, Faure et Graffigny<sup>IX</sup> imaginent des vaisseaux spatiaux équipés de grands miroirs pour utiliser la pression de radiation de la lumière solaire pour se mouvoir<sup>20</sup>. Cette méthode de propulsion est très séduisante, car elle permet de réduire la masse de combustible embarquée. Néanmoins, compte tenu de la faible accélération, il n'est pas possible d'utiliser ce moyen de propulsion depuis la surface d'envol. Cette « propulsion photonique » n'a pour l'instant pas encore été appliquée avec succès, mais des projets sont à l'étude.

Avec le développement des lasers, le champ d'applications de la pression de radiation lumineuse s'est considérablement étendu. A une échelle microscopique, on la retrouve dans les mécanismes de refroidissement des atomes par laser<sup>21</sup>. La pression de radiation permet dans ce cas de diminuer l'agitation thermique des atomes, en choisissant la fréquence de

<sup>IX</sup> Henry de Graffigny & Georges Le Faure, *Les Aventures Extraordinaires d'un Savant Russe*, Edinger, 1889.

l'onde de façon à l'accorder sur une des fréquences de résonance de la section efficace d'absorption des atomes. Ces expériences ont confirmé l'existence des condensats prévus théoriquement par Bose et Einstein.

A l'aide de faisceaux lasers focalisés, il est aussi possible de piéger ou de manipuler des objets micrométriques, en particulier de nature biologique. Ces « pinces optiques »<sup>22,23</sup> ouvrent des perspectives tant en biophysique qu'en micro-rhéologie<sup>24</sup>.

Par ailleurs, la pression de radiation lumineuse a été envisagée comme mécanisme participant à la génération par laser d'ondes élastiques dans les solides, mais son effet est alors dominé par l'effet thermo-élastique<sup>25,26</sup>. La pression de radiation des ondes électromagnétiques couvre donc un vaste domaine d'applications, de l'échelle atomique au macroscopique.

#### La pression de radiation en acoustique :

Un des effets les plus spectaculaires de la pression de radiation acoustique est la fontaine acoustique (cf. figure 1.5). Lorsqu'une source acoustique, placée au fond d'un récipient contenant un liquide, émet une onde harmonique, la surface du liquide est déplacée. Si l'intensité acoustique est suffisamment importante, une partie du fluide peut être éjectée, à la manière d'une fontaine. Moins spectaculaire visuellement, une autre expérience consiste à placer un objet en vis-à-vis d'une source acoustique et de mesurer son poids à l'aide d'une balance. Ce dernier varie en présence de l'onde acoustique. Comme cette variation est proportionnelle à l'intensité acoustique émise, il s'agit d'un phénomène non linéaire, appelé « pression de radiation ».

Le concept de pression de radiation acoustique n'est pas récent. La façon initiale de l'aborder a été influencée par les travaux réalisés en électromagnétisme<sup>27</sup>. Néanmoins, comme les ondes acoustiques mettent en mouvement le milieu matériel dans lequel elles se propagent, la pression de radiation présente des différences en acoustique. La pression acoustique n'est pas une quantité qui se résume à une force par unité de surface exercée sur un objet « insonifié » : l'onde acoustique elle-même correspond à la propagation d'une surpression. Dans un fluide idéal, deux phénomènes peuvent donc donner naissance à une pression de radiation acoustique. Outre le transfert de quantité de mouvement de l'onde à un objet ou une interface qu'elle rencontre, il peut exister une pression statique moyenne dans le fluide soumis à l'onde, qui participe alors aussi à la force s'exerçant sur l'objet si elle est différente de la pression statique qui règne derrière celui-ci.

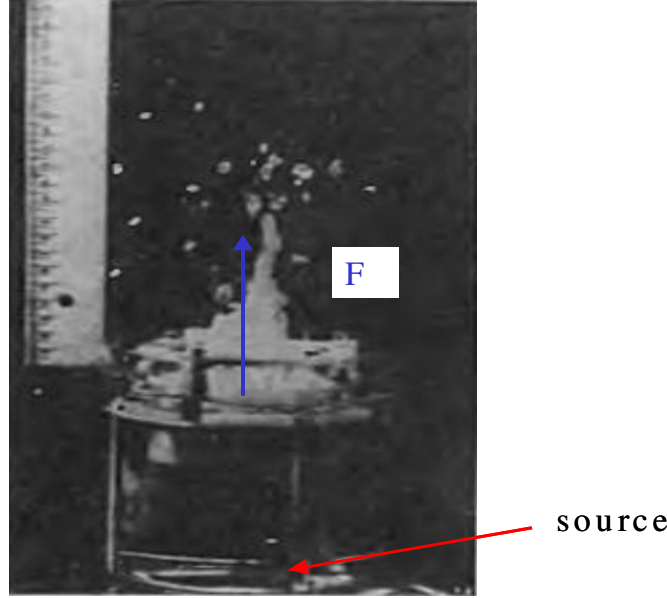


Figure 1.5 : Exemple de fontaine acoustique. La source est immergée dans l'eau. La force résultant de la pression de radiation expulse le liquide (d'après L. Bergman<sup>28</sup>).

Comme en électromagnétisme, la pression de radiation acoustique est proportionnelle à la valeur moyenne de la densité d'énergie. Cependant, le coefficient de proportionnalité dépend des conditions expérimentales. Suite aux travaux de Maxwell et aux résultats expérimentaux obtenus par Lebedev, Rayleigh s'est intéressé à la pression exercée par une vibration (vibration d'une corde, pendule de longueur variable, propagation d'une onde acoustique). Il a publié un premier article sur le sujet en 1902<sup>27</sup>. En considérant la propagation d'une onde plane harmonique dans un gaz obéissant à la loi de Boyle, il a montré que sur une cible parfaitement absorbante, la pression de radiation acoustique, définie comme la moyenne temporelle<sup>x</sup> de la pression acoustique en variables de Lagrange, est égale à la valeur moyenne temporelle de la densité d'énergie de l'onde  $\langle E \rangle_T$  :

$$\langle P^L - P_0 \rangle_T = \langle E \rangle_T. \quad (1.65)$$

Cette pression sera par la suite appelée « pression de radiation de Langevin », puisque Langevin en a établi l'expression sans faire l'hypothèse d'une transformation isotherme.

Une onde plane possède en théorie une extension latérale infinie : elle n'existe donc pas dans la nature. Néanmoins, au début du 20<sup>ème</sup> siècle, d'une part les ondes acoustiques étudiées sont généralement audibles ( $f < 20$  kHz) et d'autre part les expérimentateurs peuvent tirer parti

<sup>x</sup> Il s'agit de la moyenne calculée sur une période  $T$  de l'onde harmonique.



d'un dispositif créé quelques années auparavant : le tube de Kundt<sup>XI</sup>. En 1903, Altberg met ainsi en évidence l'existence d'une pression de radiation acoustique<sup>29</sup>. En mesurant séparément l'intensité acoustique et la pression moyenne exercée sur une paroi placée à l'extrémité d'un tube de Kundt, il montre que cette pression est proportionnelle à la densité d'énergie acoustique. Suite à cette expérience, de nombreux travaux ont été publiés (Beyer<sup>30</sup> recense vingt-huit publications en trois ans -voir par exemple<sup>31,32</sup>-).

En 1905, un second article de Rayleigh reprend le raisonnement mené dans le premier, mais en développant cette fois l'équation d'état isentropique d'un gaz parfait jusqu'au second ordre (équation (1.14), prise dans le cas particulier d'un gaz parfait)<sup>33</sup>. La pression de radiation qui en résulte porte depuis le nom de « pression de radiation de Rayleigh ». Elle est proportionnelle au coefficient de non linéarité du fluide  $\beta$  :

$$\langle P^L - P_0 \rangle_T = \frac{\beta}{2} \langle E \rangle. \quad (1.66)$$

De nombreux articles contradictoires ont ensuite été publiés, pour tenter d'expliquer ou de mettre en défaut l'une des deux définitions de la pression de radiation acoustique données par Langevin et Rayleigh (expressions (1.65) et (1.66)). Les contributions remarquables des cinq décennies suivantes sont celles de Brillouin<sup>34</sup>, qui montra que la pression de radiation peut être représentée par un tenseur de rang deux, de Biquard<sup>35</sup>, qui reporta les résultats des études menées par Langevin, et de Westervelt, qui retrouva l'expression de la pression de radiation de Rayleigh en considérant la propagation non linéaire d'une onde plane<sup>16</sup>.

Il existe aussi dans la littérature quelques articles de synthèse sur la pression de radiation acoustique. L'article de Post<sup>36</sup>, publié en 1951, contient notamment un court historique des travaux déjà réalisés. Beyer a publié deux articles<sup>30,37</sup> en 1950 et en 1978, qui reprennent des développements menés par d'autres auteurs dont les publications sont moins accessibles, soit parce qu'elles sont presque introuvables, soit parce qu'elles n'ont pas été écrites en anglais. Chu et Apfel<sup>38</sup> ont écrit un article de synthèse en 1983. En 1991, Wang et Lee<sup>39</sup> ont apporté une contribution, qui a donné lieu à un chapitre du livre « Nonlinear acoustics », édité par Hamilton et Blackstock<sup>40</sup>.

A l'heure actuelle, la controverse sur les définitions de la pression de radiation acoustique par Rayleigh et Langevin n'est toujours pas close. L'expression de la pression de radiation selon Langevin a été vérifiée par l'expérience : elle fait par exemple l'objet d'une application à la

---

<sup>XI</sup> Lorsqu'une onde est engendrée dans un tube dont le diamètre est inférieur à la demi-longueur d'onde, elle est quasi-plane et non guidée.

calibration des transducteurs. A notre connaissance, très peu d'expériences mettent en jeu la pression de radiation de Rayleigh. En particulier, sa dépendance en fonction du coefficient de non linéarité  $\beta$  n'a pas été mise en évidence. Dans son article de 1978, Beyer déclare après plus de trente années d'étude du sujet : *"It might be said that radiation pressure is a phenomenon that the observer thinks he understands—for short intervals, and only every now and then"*<sup>37</sup>.

Nos ambitions restent donc modestes. Cette partie est un état de l'art des connaissances actuelles sur le sujet.

### 1.2.2. Définitions de la pression de radiation en acoustique

Historiquement, la pression de radiation a été introduite sous l'hypothèse d'une onde plane harmonique se propageant dans un fluide idéal, rencontrant une interface plane perpendiculaire à sa direction de propagation. Expérimentalement, un transducteur de taille finie ne peut pas émettre une onde plane en régime harmonique : en champ proche, la diffraction est caractérisée par des interférences et en champ lointain, l'onde diverge. Pour certains auteurs (Westervelt<sup>16</sup> et Borgnis<sup>41</sup>, par exemple), une onde plane peut être simulée expérimentalement si une onde acoustique est émise dans un tube dont le diamètre est bien inférieur à la longueur d'onde, afin d'éviter qu'elle soit guidée. Facilement réalisable pour des ondes sonores dans l'air, cette configuration est plus difficile à mettre en œuvre dans le cas d'ultrasons se propageant dans l'eau (une fréquence de 1 MHz correspond alors à une longueur d'onde de 1,5 mm).

Dans la littérature traitant de la pression de radiation acoustique dans un fluide idéal, deux définitions, dépendant de la description (lagrangienne ou eulerienne) utilisée, sont usuellement présentées.

#### 1.2.2.1. Définition lagrangienne

En variables de Lagrange, la pression de radiation a été définie par Rayleigh comme *l'excès moyen de pression lagrangienne, induite le long du fluide par la propagation d'une onde acoustique*<sup>27,33,38,40</sup>. Certains auteurs<sup>40</sup> précisent que la terminologie « pression de radiation » ne s'applique qu'à la manifestation de cet excès moyen de pression sur une interface. Cette définition suggère que le faisceau acoustique crée un excès moyen de pression dans le fluide. La pression derrière l'interface étant égale à la pression hydrostatique du fluide au repos, celle-ci subit une force.

#### 1.2.2.2. Définition eulerienne

La définition eulerienne de la pression de radiation a été introduite par Poynting<sup>31</sup>. Elle considère la pression de radiation comme *la force par unité de surface induite par l'onde, se manifestant sur une cible placée dans le fluide face à la source*<sup>34,42,43</sup>. Selon cette description, un excès moyen de pression peut régner dans le fluide, mais il n'est pas pour autant nécessaire à l'existence de la pression de radiation<sup>XII</sup>. La pression de radiation au sens eulerien peut simplement correspondre à un transfert local de quantité de mouvement de l'onde à la cible. Dans ce cas particulier, la définition eulerienne est équivalente à celle que l'on trouve en électromagnétisme : l'effet est local, contrairement à ce que suppose la définition lagrangienne de la pression de radiation.

Même si les concepts précédents sont généralisés au cas des fluides visqueux (cf. chapitre 3), nous étudions d'abord la pression de radiation dans un fluide parfait.

#### 1.2.3. Tenseur des contraintes de radiation de Brillouin

La pression de radiation est un phénomène non linéaire. Pour le modéliser, il est donc nécessaire de développer les équations fondamentales de l'acoustique jusqu'au second ordre. Par ailleurs, la force exercée par une onde sur un obstacle est une quantité intrinsèquement lagrangienne, puisque, excepté dans le cas où la cible est infiniment rigide, celle-ci est déplacée sous son action. Néanmoins, la définition eulerienne favorise la distinction entre les définitions de la pression de radiation par Langevin et Rayleigh. Aussi utilisons-nous d'abord l'approche de Brillouin, qui a montré dans les variables d'Euler que la pression de radiation est représentée par un tenseur de rang deux<sup>34</sup>.

Pour calculer la force qu'exerce sur un objet une onde harmonique de fréquence  $f_0 = \frac{1}{T_0}$ , il est nécessaire d'intégrer, sur une surface (qui ne dépend pas du temps) entourant l'objet, une quantité homogène à une pression.

---

<sup>XII</sup> La définition eulerienne de la pression de radiation est à première vue plus générale que sa définition lagrangienne.

En sommant l'équation d'Euler (équation (1.7) écrite pour un fluide parfait) et l'équation de conservation de la masse (1.11) multipliée par la  $i^{\text{ème}}$  composante  $v_i$  de la vitesse, il vient<sup>XIII</sup> :

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_j} \delta_{ij}. \quad (1.67)$$

L'expression (1.67) s'écrit encore :

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(P \delta_{ij} + \rho v_i v_j) = 0, \quad (1.68)$$

où le second terme représente la divergence d'un tenseur, homogène à une énergie, assimilable à un flux de quantité de mouvement.

En intégrant l'équation (1.68) dans un volume  $V$  défini par une surface fermée  $S$ , le théorème d'Ostrogradsky donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV = - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (P \delta_{ij} + \rho v_i v_j) dV = - \int_S (P \delta_{ij} + \rho v_i v_j) n_j dS, \quad (1.69)$$

où  $n_j$  est le vecteur unitaire normal à l'élément de surface  $dS$ .

La variation temporelle de la quantité de mouvement dans un volume  $V$  est donc égale à l'intégrale du tenseur  $P \delta_{ij} + \rho v_i v_j$  le long d'une surface  $S$  entourant ce volume.

Introduisons la valeur moyenne temporelle calculée sur une période  $T_0$  :  $\langle \rangle_{T_0}$ . En régime permanent, la valeur moyenne temporelle d'une dérivée par rapport au temps est nulle :  $\langle \partial(\rho v_i) / \partial t \rangle_{T_0} = 0$ . La valeur moyenne temporelle de l'équation (1.69) s'écrit donc :

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (1.70)$$

où  $T_{ij}$  est le « tenseur des contraintes de radiation de Brillouin »<sup>34</sup>, défini comme :

$$T_{ij} = - \langle P^E - P_0 \rangle_{T_0} \delta_{ij} - \langle \rho v_i v_j \rangle_{T_0}, \quad (1.71)$$

L'exposant <sup>E</sup> indique qu'il s'agit d'une pression eulerienne.

L'équation (1.70) signifie que le tenseur des contraintes de radiation est à divergence nulle dans un fluide idéal. Ce tenseur est composé de deux termes. Le second est clairement non linéaire, puisqu'il fait intervenir le carré de la vitesse particulière du fluide. Il correspond à un flux de quantité de mouvement<sup>XIV</sup> et il a pour origine les termes convectifs des équations

<sup>XIII</sup> Nous adoptons ici la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés.

<sup>XIV</sup> Ce terme est quelquefois appelé tenseur de Reynolds.

d'Euler et de conservation de la masse. Le premier terme n'a pas d'équivalent pour la pression de radiation lumineuse. Il correspond à un excès moyen de pression, en coordonnées eulériennes, régnant dans le fluide et participant à la contrainte lorsqu'il se manifeste sur une interface. Cet excès moyen de pression est aussi d'origine non linéaire. Il traduit la réponse non linéaire du milieu fluide à une sollicitation mécanique, modélisée par l'équation. (1.14).

Pour une onde plane se propageant suivant l'axe 3, il vient :  $\vec{v} = v_i \delta_{i3}$ . Au second ordre, la composante  $T_{33}$  s'écrit alors :

$$T_{33} = -\langle P^E - P_0 \rangle_{T_0} - \rho_0 \langle v^2 \rangle_{T_0}. \quad (1.72)$$

Le second terme de l'expression de  $T_{33}$  correspond à la transposition directe de la pression de rayonnement électromagnétique au cas des ondes acoustiques. Il vaut le double de la densité d'énergie cinétique moyenne  $\langle E_C \rangle_{T_0}$  de l'onde en régime linéaire.

Déterminer la force exercée par l'onde plane sur un objet plan dont la normale à la surface est parallèle au vecteur d'onde incident revient à intégrer la composante axiale du tenseur de Brillouin sur une surface  $S$  entourant l'objet :

$$F = -\int_S T_{33} dS. \quad (1.73)$$

L'onde acoustique peut, selon la nature de l'objet, transférer tout ou partie de sa quantité de mouvement.

Le tenseur des contraintes de radiation de Brillouin met donc en évidence les différents phénomènes à l'origine de la pression de radiation acoustique. Outre le transfert de quantité de mouvement à l'interface, un excès moyen de pression peut lui aussi participer à la création d'une force de radiation.

#### 1.2.4. Excès moyen de pression

Pour calculer l'excès moyen de pression intervenant dans l'expression de  $T_{ij}$ , projetons sur l'axe  $i$  l'équation (1.10) écrite pour un fluide parfait :

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} + \nabla_i P = -\nabla_i L. \quad (1.74)$$

Prenons la valeur moyenne temporelle de l'équation (1.74). En régime permanent, la valeur moyenne temporelle de la dérivée par rapport au temps de la vitesse particulaire est nulle. En intégrant sur l'espace, nous obtenons alors la « seconde relation de Langevin », qui relie la valeur moyenne temporelle de la pression eulerienne (appelée « excès moyen de pression eulerienne ») à celle de la densité lagrangienne d'énergie<sup>38,39,43</sup> :

$$\langle P^E - P_0 \rangle_{T_0} = -\langle L \rangle_{T_0} + C. \quad (1.75)$$

La constante d'intégration  $C$  est une quantité du second ordre, indépendante du temps et de l'espace.

Calculons maintenant l'excès moyen de pression en variables de Lagrange, à l'aide de la relation (1.2) :

$$\langle P^L - P_0 \rangle_{T_0} = \langle P^E - P_0 \rangle_{T_0} + \langle \vec{U} \cdot \vec{\nabla} P^E \rangle_{T_0}. \quad (1.76)$$

Au second ordre, le deuxième terme du membre de droite s'écrit, à l'aide de l'équation d'Euler linéarisée et d'une intégration par parties :

$$\langle \vec{U} \cdot \vec{\nabla} P^E \rangle_{T_0} \cong -\rho_0 \left\langle \vec{U} \cdot \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \right\rangle_{T_0} = \rho_0 \left\langle \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right\rangle_{T_0} = 2 \langle E_c \rangle_{T_0}. \quad (1.77)$$

L'excès moyen de pression lagrangienne est donc donné par :

$$\langle P^L - P_0 \rangle_{T_0} = \langle E \rangle_{T_0} + C, \quad (1.78)$$

où  $E$  est la densité d'énergie totale de l'onde en régime linéaire. L'équation (1.78) est connue sous le nom de « première relation de Langevin »<sup>38,39,43</sup>.

Pour une onde plane progressive, la densité lagrangienne d'énergie  $L$  est nulle en régime linéaire. L'excès moyen de pression eulerien est alors indépendant des coordonnées d'espace et du temps :

$$\langle P^E - P_0 \rangle_{T_0} = C. \quad (1.79)$$

Analysons ces résultats à la lumière de nos connaissances sur la propagation non linéaire. Les termes non linéaires de l'équation d'Euler contribuent à des effets non linéaires locaux (cf.

1.1.1.5) n'intervenant pas dans la propagation d'une onde plane. Or, l'excès moyen de pression contenu dans l'expression du tenseur de Brillouin provient, au moins en partie, d'effets non linéaires cumulatifs (la non linéarité de l'équation d'état y contribue). Les termes non linéaires qui conduisent à une contribution cumulative (provenant de l'équation d'état et de l'équation de conservation de la masse) doivent donc intervenir par l'intermédiaire de la constante  $C$  dans l'expression (1.75) de l'excès moyen de pression eulerienne.

### 1.2.5. Pression de radiation de Langevin en variables d'Euler

La configuration usuelle conduisant à la pression de radiation de Langevin est illustrée sur la figure 1.6. Supposons, même si c'est impossible en pratique, qu'une source acoustique de dimensions finies émette une onde acoustique plane harmonique<sup>xv</sup>. L'expression de la force exercée par l'onde sur un objet plan dont la normale coïncide avec l'axe de propagation est donnée par les équations (1.72) et (1.73). Comme une région du fluide n'est pas perturbée par l'onde acoustique, l'excès moyen de pression localisé dans la zone insonifiée ne correspond pas à un état stable. Il tend à s'équilibrer avec la pression hydrostatique du fluide environnant et il est alors d'usage de le considérer comme nul :

$$\langle P^E - P_0 \rangle_{T_0} = 0. \quad (1.80)$$

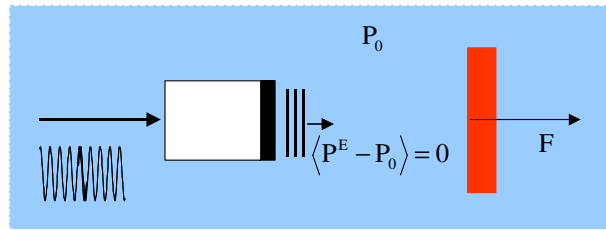


Figure 1.6 : Configuration usuelle de la pression de radiation de Langevin.

Dans la littérature, d'autres raisons sont parfois invoquées pour justifier cette hypothèse. Certains auteurs supposent que la propagation de l'onde acoustique est linéaire<sup>42</sup>, ce qui conduit à négliger *a priori* les termes non linéaires cumulatifs des équations de conservation et d'état, pourtant du même ordre de grandeur que les autres contributions au tenseur de

<sup>xv</sup> Notons que cette hypothèse, généralement utilisée pour introduire la pression de radiation de Langevin, n'est pas rigoureuse.

radiation de Brillouin. Beissner postule directement que la constante  $C$  ne contribue pas à la force de radiation<sup>43</sup>.

Avec l'hypothèse (1.80), l'expression de la composante axiale du tenseur de Brillouin devient :

$$T_{33} = -2\langle E_C \rangle_{T_0} = -\langle E \rangle_{T_0}, \quad (1.81)$$

puisque la densité d'énergie totale d'une onde plane est égale au double de sa densité d'énergie cinétique. La force de radiation :

$$F = \int_S \langle E \rangle_{T_0} dS, \quad (1.82)$$

conduit à la pression de radiation de Langevin, dont l'expression (1.65) est l'opposée de la composante axiale du tenseur de Brillouin (1.81). Dans le cas d'une onde harmonique, elle permet de modéliser certaines expériences mentionnées en introduction, comme la fontaine et la balance acoustique.

### 1.2.6. Pression de radiation de Rayleigh en variables d'Euler

Dans le cadre de la description eulerienne, la pression de radiation de Rayleigh diffère de celle de Langevin par l'existence d'un excès moyen de pression. On impose alors usuellement à l'onde acoustique d'être émise dans un tube fermé, de telle sorte que le milieu se trouve isolé mécaniquement. Cette configuration est illustrée sur la figure 1.7. Rien ne s'oppose alors à la création d'un excès moyen de pression dans le fluide.

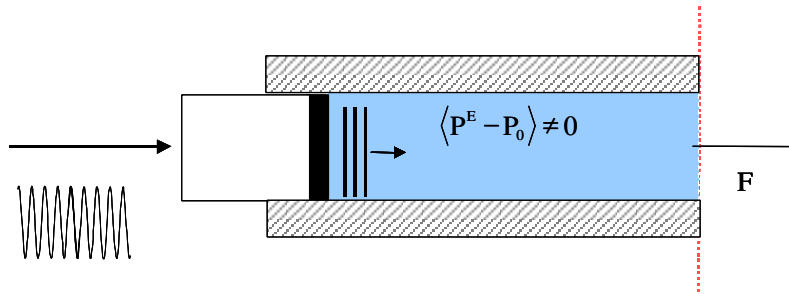


Figure 1.7 : Conditions expérimentales définies historiquement pour mettre en évidence la pression de radiation de Rayleigh. L'onde est émise dans un tube de longueur  $e$ , fermé par une cible.



Plusieurs méthodes existent pour calculer cet excès moyen de pression. Nous reprenons d'abord celle proposée par Wang et Lee<sup>39</sup>, qui utilisent l'équation d'état au second ordre pour déterminer la constante  $C$  de l'équation (1.78).

Prenons la valeur moyenne temporelle de l'équation d'état donnant la masse volumique comme une fonction de la pression acoustique :

$$\langle \rho^E - \rho_0 \rangle_{T_0} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{s, P=P_0} \langle P^E - P_0 \rangle_{T_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial P^2} \right)_{s, P=P_0} \langle (P^E - P_0)^2 \rangle_{T_0}. \quad (1.83)$$

Pour une onde plane harmonique d'amplitude  $p_m$ , la seconde relation de Langevin (1.75) et l'équation (1.83) donnent :

$$\langle \rho^E - \rho_0 \rangle_{T_0} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{s, P=P_0} C + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial P^2} \right)_{s, P=P_0} \frac{p_m^2}{2}. \quad (1.84)$$

Soit  $e$  la longueur du tube (i.e. de la colonne de fluide) au repos. En présence de l'onde, la paroi se déplace de la quantité  $de$ . L'équation de conservation de la masse à une dimension est alors moyennée :

$$\rho_0 e = \langle \rho^E \rangle_{T_0} (e + de), \quad (1.85)$$

soit encore,

$$\langle \rho^E - \rho_0 \rangle_{T_0} = -\rho_0 \left( \frac{de/e}{1 + de/e} \right). \quad (1.86)$$

Comme :

$$\left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial P^2} \right)_0 = \left( \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{1}{c^2} \right) \right)_0 = -2 \left( \frac{\partial c}{\partial P} \right)_0 \frac{1}{c_0^3} = -\frac{2}{\rho_0 c_0^4} (\beta - 1), \quad (1.87)$$

l'expression (1.84) devient :

$$C = (\beta - 1) \langle E \rangle_{T_0} - \rho_0 c_0^2 \left( \frac{de/e}{1 + de/e} \right). \quad (1.88)$$

Supposons maintenant que la cible à l'extrémité du tube est équivalente à un ressort de raideur  $K_p$ . La déformation de la longueur du tube  $de/e$  est alors déterminée par l'équilibre entre cette raideur et la force qui s'exerce, c'est-à-dire :

$$K_p de = \langle P^L - P_0 \rangle_{T_0} S, \quad (1.89)$$

où  $S$  est la surface de la cible et  $\langle P^L - P_0 \rangle_{T_0}$  est l'excès moyen de pression, exprimé cette fois en coordonnées lagrangiennes, puisque l'on s'intéresse au mouvement de cette paroi.

Compte tenu de la relation (1.78),  $de$  est un terme du second ordre :

$$de = \frac{S}{K_P} (\langle E \rangle_{T_0} + C). \quad (1.90)$$

La constante  $C$  s'écrit donc :

$$C \equiv (\beta - 1) \langle E \rangle_{T_0} - \rho_0 c_0^2 \frac{de}{e}. \quad (1.91)$$

A l'aide des équations (1.90) et (1.91), la constante  $C$  s'écrit finalement :

$$C = \left( \frac{\beta}{1 + K_0 / K_P} - 1 \right) \langle E \rangle_{T_0}, \quad (1.92)$$

où  $K_0 = \rho_0 c_0^2 S / e$  est la « raideur » de la colonne de fluide associée à une compression adiabatique.

L'excès moyen de pression est donc fonction de la nature de la cible. Si sa raideur est grande devant celle du fluide (i.e.  $K_0 \ll K_P$ ), ce qui revient à la supposer infiniment rigide, mais qu'elle est néanmoins absorbante (absence d'onde réfléchie), l'excès moyen de pression eulerien s'écrit :

$$\langle P^E - P_0 \rangle_{T_0} = (\beta - 1) \langle E \rangle_{T_0}. \quad (1.93)$$

Si on considère que le fluide et la cible ont la même raideur, cela revient à supposer qu'ils ont la même impédance caractéristique, ou encore à assimiler la cible au fluide lui même. Il vient alors :

$$\langle P^E - P_0 \rangle_{T_0} = \left( \frac{\beta}{2} - 1 \right) \langle E \rangle_{T_0}. \quad (1.94)$$

Dans la littérature, ce cas particulier est appelé cible parfaitement absorbante (« Truly perfectly absorbing target »)<sup>38, 40</sup>. Cette relation a aussi été établie par Landau et Lifchitz<sup>10</sup>.

Ainsi, le signe de l'excès moyen de pression eulerien dépend de la valeur du coefficient de non linéarité et des conditions aux limites. Pour l'air ( $\beta = 1,2$ ),  $\langle P^E - P_0 \rangle_{T_0}$  est négatif en présence d'une paroi parfaitement absorbante. Il est par contre positif pour une paroi

infiniment rigide et absorbante. Dans l'eau ( $\beta = 3,5$ ), l'excès moyen de pression eulerien est positif dans les deux cas.

Dans le cas d'une cible parfaitement absorbante, les relations (1.72) et (1.94) donnent la composante axiale du tenseur de Brillouin ; elle est égale à l'opposé de la pression de radiation de Rayleigh (1.66)<sup>XVI</sup> :

$$T_{33} = -\frac{\beta}{2} \langle E \rangle_{T_0} . \quad (1.95)$$

D'après l'équation (1.73), la force de radiation est, pour une interface parfaitement absorbante :

$$F = \frac{\beta}{2} \int_S \langle E \rangle_{T_0} dS . \quad (1.96)$$

Elle est double dans le cas d'une paroi absorbante parfaitement rigide. Ceci montre la sensibilité de la pression de radiation vis-à-vis de la nature de l'interface. Etant proportionnelle au coefficient de non linéarité, dans l'eau, la pression de radiation de Rayleigh est, à densité d'énergie égale, supérieure à la pression de radiation de Langevin. Dans l'air, le résultat dépend de la nature de la paroi.

## 1.2.7. Expressions des pressions de radiation en variables de Lagrange

### 1.2.7.1. Pression de radiation de Langevin

Revenons à la configuration de la figure 1.6, généralement admise comme conduisant à la pression de radiation de Langevin (cf. 1.2.5.). Comme la pression de l'autre coté de l'interface est toujours la pression d'équilibre  $P_0$  du fluide, la force qui s'exerce sur la cible peut être reliée à la pression lagrangienne  $P^L$  qui s'exerce sur l'interface. D'après les relations (1.76) et (1.77), l'annulation de l'excès moyen de pression eulerienne conduit à un excès moyen de pression lagrangienne s'écrivant :  $\langle P^L - P_0 \rangle_{T_0} = 2 \langle E_c \rangle_{T_0}$ . L'équipartition des énergies d'une onde plane en régime linéaire, conduit alors à l'expression (1.65) de la pression de radiation de Langevin :

<sup>XVI</sup> Comme pour la pression de radiation de Langevin. Cette égalité formelle entre deux quantités respectivement eulerienne et lagrangienne vient de l'égalité, à une dimension, entre la composante du tenseur de Reynolds ( $\rho_0 v_3^2 = E$ ) et la différence entre les excès moyens de pression eulerienne et lagrangienne (cf. relations (1.76) et (1.77)). Les deux quantités s'expriment par ailleurs en fonction de la valeur moyenne de la densité d'énergie de l'onde, calculée dans l'approximation linéaire, donc indépendante du système de coordonnées choisi.

$$\langle P^L - P_0 \rangle_{T_0} = \langle E \rangle_{T_0} .$$

A la lumière de l'hypothèse généralement admise pour introduire la pression de Langevin, ce résultat est surprenant : en variables de Lagrange, un excès moyen de pression pourrait exister le long du fluide, sans s'équilibrer avec la pression environnante ?

Cette contradiction est mise en évidence par Beissner<sup>44</sup>, qui remarque fort justement que l'approche eulerienne modélise la pression de radiation de Langevin comme un effet local résultant d'un transfert de quantité de mouvement de l'onde à une interface.

En fait, nous comprenons ici que l'hypothèse d'onde plane harmonique engendrée par un transducteur de taille finie débouche sur une incohérence. L'extension latérale infinie de l'objet théorique « onde plane » est incompatible avec l'équilibre entre l'excès moyen de pression et une pression hydrostatique environnante. En d'autres termes, l'onde plane harmonique, parce-qu'elle se réduit à une seule dimension d'espace et est émise continûment, occupe tout cet espace : l'excès moyen de pression qu'elle crée en se propageant devient la pression statique de référence.

Remarquons aussi que la pression de radiation de Langevin est induite par les termes des équations fondamentales conduisant à des contributions non linéaires locales dans l'équation d'onde (1.19). Ces termes non linéaires locaux, proportionnels à la densité lagrangienne d'énergie de l'onde exprimée en régime linéaire, sont nuls pour une onde plane. On arrive alors à la même conclusion : la pression de radiation de Langevin n'est pas rigoureusement définie sous l'hypothèse formelle d'onde plane.

Finalement, seule la pression de radiation selon Rayleigh a un sens pour une onde plane harmonique. Nous verrons, dès la fin de ce chapitre puis au second, ce qu'il en est lorsque la source acoustique a une taille finie et qu'elle émet un train d'ondes.

Beissner<sup>43</sup> a noté que la modélisation de la pression de radiation de Langevin nécessitait la prise en compte du caractère tensoriel de la pression de radiation. Les relations de Langevin, historiquement introduite pour une onde plane, ne sont pas bien adaptées.

#### 1.2.7.2. Pression de radiation de Rayleigh

En variables de Lagrange, les équations (1.78) et (1.93) donnent, dans le cas d'une cible parfaitement absorbante, l'expression (1.66) de la pression de radiation trouvée par Rayleigh :

$$\langle P^L - P_0 \rangle_{T_0} = \frac{\beta}{2} \langle E \rangle_{T_0} .$$

### 1.2.8. Pression de radiation et propagation non linéaire

Westervelt a établi l'expression de la pression de radiation de Rayleigh en variables de Lagrange, en calculant la valeur moyenne temporelle de la pression (i.e. l'excès moyen de pression lagrangienne) associée à la propagation non linéaire d'une onde plane harmonique<sup>16,37,40</sup>.

Partons de l'équation (1.52) gouvernant la propagation non linéaire du déplacement, à une dimension, en coordonnées lagrangiennes. Comme la valeur moyenne temporelle de la vitesse particulaire est nulle<sup>38</sup>, la valeur moyenne de l'équation (1.52) s'écrit :

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial a} \right\rangle_{T_0} = \frac{\beta}{2} \left\langle \left( \frac{\partial U}{\partial a} \right)^2 \right\rangle_{T_0} . \quad (1.97)$$

En intégrant sur l'espace cette équation, nous obtenons la valeur moyenne du déplacement :

$$\langle U(a) \rangle_{T_0} = \frac{\beta}{2} \left\langle \left( \frac{\partial U}{\partial a} \right)^2 \right\rangle_{T_0} a = \frac{\beta}{4} k_0^2 U_0^2 a . \quad (1.98)$$

Son expression est identique à celle (1.56) du déplacement statique  $U_S$  engendré par la propagation non linéaire. Toutefois, l'approximation quasi-linéaire n'est pas nécessaire ici.

Grâce à l'équation de conservation de la masse (1.49), l'équation d'état au second ordre s'exprime en fonction du gradient du déplacement :

$$P^L - P_0 = -A \frac{\partial U}{\partial a} + A\beta \left( \frac{\partial U}{\partial a} \right)^2 . \quad (1.99)$$

Grâce à l'équation (1.97), la valeur moyenne temporelle de l'expression (1.99) devient :

$$\langle P^L - P_0 \rangle_{T_0} = A \left\langle \frac{\partial U}{\partial a} \right\rangle_{T_0} . \quad (1.100)$$

L'excès moyen de pression lagrangienne est donc proportionnel à la valeur moyenne du gradient du déplacement, aussi appelé « acoustic straining »<sup>38</sup>.

La densité d'énergie potentielle  $E_p$  de l'onde plane s'écrit :

$$E_p = \frac{1}{2} A \left( \frac{\partial U}{\partial a} \right)^2 . \quad (1.101)$$

A l'aide de l'équipartition des énergies cinétiques et potentielles, les relations (1.97), (1.100) et (1.101) conduisent à :

$$\langle P^L - P_0 \rangle_{T_0} = \frac{\beta}{2} \langle E \rangle_{T_0}. \quad (1.102)$$

L'excès moyen de pression lagrangienne induit par la propagation non linéaire de l'onde acoustique est identique à l'expression (1.66) de la pression de radiation de Rayleigh, dans le cas d'une « cible parfaitement absorbante » (c'est à dire en l'absence de cible). Notons qu'au cours du calcul précédant, aucune hypothèse de confinement du fluide n'est formulée.

Comme le raisonnement mené dans la partie 1.2.7.1, cette démonstration montre que le seul excès moyen de pression susceptible d'exister dans le fluide a pour origine la propagation non linéaire de l'onde, qui conduit à la pression de radiation de Rayleigh.

Remarque « historique » :

Ce résultat est en accord avec l'approche eulerienne du problème présentée à la partie 1.2.6. Cependant, lors de son étude de la contrainte de radiation dans les solides, Brillouin<sup>34</sup> a initialement supposé que la valeur moyenne du gradient du déplacement était nulle, ce qui revient à négliger l'existence du déplacement statique  $U_s^{XVII}$ . Il en résulta une contrainte de radiation égale au double de celle correspondant à l'expression (1.66). Ce raisonnement a ensuite été repris dans les fluides par Hertz et Mende<sup>45</sup>, puis Rooney et Nyborg<sup>46</sup>. L'erreur a été rectifiée par Chu et Apfel dans les fluides<sup>38</sup>, et par Cantrell dans les solides<sup>47</sup>.

### 1.2.9. Expériences et applications dans la littérature

Au cours du 20<sup>ème</sup> siècle, la confusion issue des différents modèles physiques de la pression de radiation acoustique a naturellement poussé les chercheurs vers la réalisation d'expériences, dont nous rappelons ici les plus marquantes. Par ailleurs, la pression de radiation de Langevin donne lieu à des applications que nous mentionnons dans ce chapitre.

#### 1.2.9.1. Tentatives expérimentales pour mettre en évidence la pression de radiation de Rayleigh

Comme il est nécessaire de travailler en milieu confiné pour simuler des ondes planes harmoniques, peu de résultats expérimentaux existent sur la pression de radiation de Rayleigh.

---

<sup>XVII</sup> Dans le cadre de l'approximation quasi-linéaire, l'onde est alors réduite à la somme des composantes à la fréquence fondamentale et aux fréquences harmoniques. Ces composantes n'engendrent évidemment que des déplacements dont la valeur moyenne temporelle est nulle.

En 1906, W. Zernov<sup>48</sup> a effectué des mesures dans l'air non confiné, c'est-à-dire dans une configuration expérimentale devant conduire au résultat de Langevin. Son article est à l'origine d'une polémique, puisque le résultat confirme l'expression de la pression de radiation de Rayleigh<sup>XVIII</sup>. Notons que dans l'air, la pression de radiation de Rayleigh n'est pas très différente de celle de Langevin : dans le cas d'une paroi parfaitement réfléchissante (comme dans l'expérience de Zernov), la pression de Rayleigh n'est supérieure que de 20% à celle de Langevin. Cette expérience n'a jamais été reproduite et l'article de Zernov n'est mentionné que dans une bibliographie commentée par Post<sup>36</sup>.

En 1973, Rooney<sup>49</sup> a mesuré la pression de radiation, en situation non confinée, dans différents liquides dont les coefficients de non linéarité sont connus (eau, éthanol et n-propanol). Il montre qu'aux incertitudes expérimentales près, la pression de radiation mesurée en fluide libre ne dépend pas du coefficient de non linéarité des liquides, retrouvant là un résultat cohérent avec l'expression de Langevin.

Une publication plus récente porte sur la mesure de l'excès moyen de pression eulerienne, engendré par une onde stationnaire<sup>50</sup> dans un tube. Il ne s'agit pas à proprement parler d'une mesure de la pression de radiation de Rayleigh. En disposant des capteurs de pressions le long de la paroi du fluide, les auteurs mettent en évidence la dépendance spatiale de la pression moyenne, mais la constante  $C$ , qui provient des relations de Langevin et qui permet de conclure quant à la nature de la pression de radiation, n'est pas mesurée.

Bien que les discussions concernant le concept même de pression de radiation ne soient pas closes, les publications les plus récentes concernent essentiellement les applications. En raison de l'hypothèse de confinement et de l'absence de mesures quantitatives, la pression de radiation de Rayleigh se trouve, sauf exception, écartée d'emblée par les auteurs. A titre d'exemple, Torr écrit : "*The Rayleigh radiation force has no major practical importance. It is mentioned here only because it is invariably discuss alongside the Langevin radiation force in the theoretical literature*"<sup>42</sup>.

#### 1.2.9.2. Applications de la pression de radiation de Langevin

Dès les résultats d'Altberg<sup>29</sup>, la pression de radiation a été envisagée pour mesurer la puissance rayonnée par un transducteur ultrasonore, par l'intermédiaire de la force exercée sur une cible immergée dans un fluide<sup>51,52</sup>. Les transducteurs concernés sont généralement focalisés, car ils sont essentiellement destinés aux applications thérapeutiques des ultrasons,

---

<sup>XVIII</sup> Huit mesures ont été effectuées. L'écart type annoncé est de 3 %.

comme la lithotritie (destruction de calcul rénaux par ultrasons) ou l'hyperthermie (nécrose des tissus biologiques par chauffage). Il s'agit de prévenir un surdosage entraînant une dégradation involontaire des tissus biologiques traversés par l'onde ultrasonore<sup>53</sup>. La puissance rayonnée par le transducteur est déduite de la mesure de la force exercée sur une cible plane perpendiculaire au faisceau acoustique. La cible est placée sur une balance : la variation de son poids en présence de l'onde (résultant de la force de radiation) permet donc d'estimer l'intensité acoustique émise.

Comme en optique, la possibilité de piéger ou de manipuler des objets en utilisant la force de radiation acoustique fait l'objet de développements depuis quelques années. On parle alors de pinces acoustiques<sup>54,55</sup>. Il s'agit d'utiliser au minimum deux transducteurs focalisés, placés en vis-à-vis de façon à ce que leurs foyers soient superposés. Un objet placé au foyer commun à ces transducteurs est alors piégé par la pression de radiation.

En 1934, King a calculé la force de radiation exercée par une onde plane harmonique dans un fluide sans perte sur une sphère rigide<sup>56</sup>. Depuis, la force de radiation exercée sur des objets de formes diverses a été étudiée. Le principe est de calculer l'intégrale du tenseur des contraintes de radiation sur la surface de l'objet, en traitant le problème de la diffusion de l'onde acoustique par l'objet<sup>57,58,59</sup>.

#### Extension de la pression de radiation de Langevin aux trains d'ondes :

Si le principe de la mesure de l'intensité acoustique fut imaginé dès les résultats d'Altberg, il a fait l'objet de perfectionnements<sup>60,61</sup>, notamment en utilisant des trains d'ondes plutôt qu'une onde harmonique, afin d'éviter l'altération par chauffage de la cible, mais aussi de réduire les effets de « streaming acoustique »<sup>XIX</sup>.

Par ailleurs, dans le domaine médical, la pression de radiation est aussi utilisée comme outil de palpation des tissus biologiques<sup>62</sup>. Ces milieux ayant un module de cisaillement faible, mais non nul, la force de radiation associée à un train d'ondes s'y propageant engendre une impulsion de cisaillement de basse fréquence. L'imagerie de la propagation de cette onde fournit une cartographie de l'élasticité de cisaillement du tissu. Cette technique est abordée au chapitre trois, portant sur l'étude de l'élasticité de cisaillement non linéaire des solides mous.

---

<sup>XIX</sup> Le streaming acoustique est un mouvement apériodique résultant d'un écoulement local du fluide provoqué par une onde acoustique (cf. chapitre 3).



Ces applications tiennent compte de la durée finie de l'émission pour estimer la quantité d'énergie déposée, mais elles ne reposent pas sur une nouvelle formulation de la pression de radiation de Langevin, qui est donc implicitement généralisée au cas du train d'ondes. En particulier, dans le cadre d'une description Eulerienne, l'excès moyen de pression est négligé. Dans certains cas, l'hypothèse d'une propagation linéaire du train d'ondes est évoquée. Or, le tenseur des contraintes de radiation de Brillouin étant une quantité du second ordre composé de quantités non cumulative, il n'y a, *a priori*, pas de raisons de négliger un terme tout en conservant l'autre.

### 1.3. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons rappelé les éléments de base nécessaires à l'abord des phénomènes non linéaires en acoustique dans les fluides. Les deux descriptions, eulerienne et lagrangienne, ont été utilisées. A partir des équations constitutives, dont seuls les termes d'ordre deux en nombre de Mach ont été retenus, nous avons rappelé l'équation de propagation en pression exprimée en coordonnées euleriennes. A l'aide de l'approximation de faible non linéarité, justifiée pour des distances inférieures à la distance de choc, ou lorsque le nombre de Gol'dBerg ou le nombre de Khokhlov sont petits devant l'unité, nous avons évoqué les principales conséquences de la non linéarité sur la propagation d'une ou deux ondes harmoniques. Passée sous silence par la description en pression, nous avons rappelé l'existence d'une composante statique du déplacement à l'aide de la description lagrangienne. Par ailleurs, la différence entre les fonctions exprimant une quantité dans les deux descriptions est, au second ordre, non cumulative.

Lorsque la quantité considérée est sujette à des effets non linéaires cumulatifs, cette différence est négligeable devant ces effets dès lors que la distance de propagation est supérieure à quelques longueurs d'ondes. Cette non linéarité est pour cette raison qualifiée de « locale ». Lorsque la quantité ne subit pas d'effets non linéaires cumulatifs, il est par contre nécessaire de tenir compte de cette différence.

Nous avons par la suite présenté un bref historique du concept de la pression de radiation en acoustique dans le cas d'un fluide parfait. Les deux pressions de radiation, historiquement introduites sous l'hypothèse d'une onde plane harmonique, ont été définies. Nous avons remarqué qu'en raison de la propagation non linéaire, la pression de radiation de Rayleigh est la seule qui puisse exister pour une onde plane. La pression de radiation de Langevin, qui intervient dans le cas de fluides non confinés, a permis le développement d'applications telle que la mesure de puissance délivrée par un transducteur à l'aide d'une balance acoustique.

L'extension de cette application aux cas de train d'ondes, a été faite sans remise en question du modèle théorique développé par une onde plane harmonique. En particulier, l'excès moyen de pression est considéré comme négligeable, sans justification rigoureuse. Aussi la question de l'existence d'une pression quasi-statique (au sens d'un excès moyen de pression) créée lors de la propagation non linéaire d'un train d'ondes s'est-elle posée. Un phénomène bien connu issu de la propagation non linéaire d'un train d'ondes, est l'auto-démodulation non linéaire. Au prochain chapitre, nous étudions ce phénomène et mettons en évidence son lien avec la pression de radiation de Rayleigh.



## **Chapitre 2**

Etude de l'auto-démodulation non linéaire et de son lien avec la pression de radiation de Rayleigh



## 2. 1. Introduction

Le terme d'auto-démodulation non linéaire a été introduit par Berkay en 1965<sup>63</sup>. Il désignait à l'origine le processus de démodulation d'amplitude d'un train d'ondes acoustiques lors de sa propagation non linéaire dans un milieu absorbant. Nous avons vu que la non linéarité de la propagation a pour conséquence l'interaction paramétrique entre deux ondes de fréquences différentes. Au cours de la propagation, cette interaction se traduit par la création d'ondes secondaires aux fréquences somme et différence. L'auto-démodulation peut s'interpréter comme la création de la composante de basse fréquence résultant de l'interaction paramétrique, mais dans le cas particulier où celle-ci a lieu entre les différentes composantes fréquentielles qui forment le spectre d'un train d'ondes. Il s'agit donc d'un phénomène qui se produit dans le cas de signaux à large bande.

Nous avons vu au premier chapitre que la propagation non linéaire d'une onde harmonique plane conduit, outre à la génération d'harmoniques ( $2f_0, 3f_0, 4f_0, \dots$ ), à la création d'une composante statique, cumulative du point de vue du déplacement de la particule fluide, mais non cumulative du point de vue de la pression. Cette dernière est, en coordonnées Lagrangiennes, la pression de radiation de Rayleigh (Eq. 1.66).

Dans cette partie, nous étudions l'auto-démodulation non linéaire en détail. Les différents modèles introduits sont tout d'abord présentés. Comme ce phénomène a été mis en évidence expérimentalement à l'aide d'hydrophones, la quantité physique choisie pour la modélisation était à l'origine la pression acoustique. Pour notre part, utilisant l'interférométrie optique, nous introduisons une description basée sur le déplacement de la particule, afin d'analyser les résultats obtenus expérimentalement. Nous montrons que l'interférométrie optique, bien adaptée à la mesure de déplacements de faible amplitude, permet la détermination du paramètre de non linéarité du fluide via la mesure du déplacement auto-démodulé. Par ailleurs nous mettons en évidence, à l'aide d'un modèle en ondes planes valable pour des distances inférieures à la distance caractéristique de la diffraction de la composante auto-démodulée, que dans le cas particulier où un régime permanent du signal source existe, deux termes contribuent au champ de la pression auto-démodulée. L'un, cumulatif, correspond au résultat connu pour l'expression de la pression auto-démodulée. L'autre, quasi-statique, est interprété en introduisant des valeurs moyennes temporelles. Cette pression quasi-statique résulte de l'existence, en champ proche, d'une valeur moyenne du gradient de déplacement constante le long de l'axe de propagation. Cette démarche nous permet, en considérant le cas limite d'une onde plane harmonique, de mettre en évidence un lien entre l'auto-démodulation et le déplacement statique défini au 1.1.4.2. Cette pression quasi-statique est une extension de la pression de radiation de Rayleigh, qui dès lors peut exister en l'absence de confinement.

## 2.2. Auto-démodulation non linéaire dans un fluide

Le concept d'auto-démodulation a d'abord été introduit par le biais d'une formulation asymptotique. Cette formulation, publiée par Berkay<sup>63</sup> a été par la suite confirmée expérimentalement par Mofett *et al*<sup>64</sup>. Nous la présentons ici.

### 2.2.1. Historique non exhaustif

L'auto-démodulation repose sur l'extension des travaux de Westervelt sur les antennes paramétriques. A partir de l'équation de Westervelt (équation 1.22), Berkay a obtenu une expression de la pression auto-démodulée en champ lointain. Cette formulation, quasi-linéaire, tient compte à la fois de la diffraction et des effets thermo-visqueux. Le premier effet se traduit par la divergence du faisceau acoustique et provoque une répartition de l'énergie de l'onde dans tout l'espace. A grande distance, l'atténuation affecte le train d'ondes primaire et

ses harmoniques supérieures. Ces deux effets limitent donc les effets non linéaires. Berktaf fait l'hypothèse suivante : la longueur d'atténuation,  $L_a = 1/\alpha_0$ , inverse du coefficient d'absorption  $\alpha_0$  correspondant à la fréquence centrale  $f_0$  du train d'ondes est supposée inférieure à la distance caractéristique des effets de diffraction du faisceau primaire (HF<sup>xx</sup>)  $L_{HF} = 1/2 k_0 r_0^2$  (distance de Rayleigh). Ainsi, d'une part la diffraction de l'onde émise initialement par la source est négligée, et d'autre part les effets non-linéaires restent faibles et ne permettent pas la formation d'une onde de choc. Une approche quasi-linéaire est donc pleinement justifiée. Le champ rayonné par la source s'écrit de la façon suivante :

$$p(r, z=0, t) = p_0 \Xi(t) \sin(2\pi f_0 t) H(r_0 - r), \quad (2.1)$$

où  $p_0$  est l'amplitude de la pression émise par la source et  $\Xi(t)$  représente la modulation d'amplitude. Cette modulation est supposée lentement variable dans le temps par rapport à la période  $T_0 = 1/f_0$ .  $H$  représente la distribution spatiale de la source de rayon  $r_0$ . Dans le cas d'un transducteur émettant en mode piston,  $H(r_0 - r)$  est égale à 1 si la distance radiale  $r$  est inférieure ou égale à  $r_0$ , et est nulle sinon.

Il est supposé que l'atténuation n'affecte pas la composante auto-démodulée. L'enveloppe étant lentement variable, la composante auto-démodulée possède un contenu fréquentiel de basse fréquence.

Sous cette hypothèse de quasi-linéarité, la pression auto-démodulée peut alors être obtenue en résolvant l'équation de propagation non linéaire sans absorption, avec un second membre calculé à partir de la solution de l'équation linéaire (avec atténuation). En raison de l'atténuation, le processus cumulatif non linéaire a lieu en « champ proche ». En champ lointain, l'expression de la pression auto-démodulée sur l'axe de la source est alors la suivante :

$$p(z, \tau) \cong \frac{\beta}{\alpha_0} \frac{p_0^2 r_0^2}{16 \rho_0 c_0^4 z} \frac{d^2 \Xi^2(\tau)}{d\tau^2}, \quad (2.2)$$

où  $z$  est la distance séparant la source du point de mesure et  $\tau$  le temps retardé.

Dans le cadre de cette formulation « historique », l'auto-démodulation apparaît donc comme un processus de « champ lointain », conséquence de la combinaison de plusieurs phénomènes. L'un, non linéaire, est à l'origine de la création de la composante de basse fréquence. Les

---

<sup>xx</sup> Le terme « HF », pour hautes fréquence, est utilisé ici pour désigné l'onde primaire par opposition au terme « BF » (basse fréquence), qui désigne la composante auto-démodulée de basse fréquence. Dans la suite,  $L_{HF}$  désigne la distance caractéristique de la diffraction de la composante de haute fréquence (à la fréquence centrale du train d'ondes  $f_0$ ) et  $L_{BF}$  la distance caractéristique de diffraction de la composante auto-démodulée.



autres, linéaires, sont la diffraction de cette composante de basse fréquence et l'absorption des composantes de haute fréquence. Il est préférable de qualifier d'auto-démodulation l'ensemble du processus non linéaire créant la composante de basse fréquence, en dehors de toute considération sur la distance de propagation par rapport aux distances caractéristiques d'absorption et de diffraction. Ce faisant, tout le processus non linéaire de basse fréquence est inclus sous cette dénomination, et non plus seulement sa contribution en champ lointain. Dans l'expression 2.2, l'atténuation et la diffraction sont responsables de la forme d'onde (disparition du signal émis par la source et de ses harmoniques, dérivation de l'enveloppe). La décroissance en  $1/z$  pourrait même suggérer que le signal auto-démodulé ne résulte pas d'un processus cumulatif, la divergence d'une onde en champ lointain se traduisant par une décroissance en  $1/z$  de l'amplitude en acoustique linéaire. Cervenka et Alais attirent l'attention du lecteur sur ce point<sup>65</sup>. Il s'agit de faire la distinction entre l'auto-démodulation non linéaire et un processus linéaire au cours duquel le train d'ondes initialement émis se propagerait linéairement en étant diffracté et atténué. Si la distance caractéristique de la diffraction était inférieure à la longueur d'atténuation de l'onde de haute fréquence, le signal observé serait alors proportionnel à la dérivée de l'enveloppe. Le fait que la pression auto-démodulée soit proportionnelle au carré de l'enveloppe ainsi qu'au coefficient de non linéarité assure qu'il s'agit bien d'un phénomène non linéaire.

Par ailleurs, il est à noter que l'auto-démodulation n'implique pas nécessairement l'intervention de l'absorption thermo-visqueuse. En effet, dans le cas hypothétique d'un fluide parfait, la propagation non linéaire d'une onde se traduit par un transfert en cascade de l'énergie de la fréquence fondamentale vers ses harmoniques supérieures jusqu'à l'apparition d'un choc. Le phénomène d'extra-atténuation non linéaire est alors propre à la dissipation à travers le choc. Cette situation correspond au cas physique où la distance de choc est très inférieure à la longueur d'atténuation de l'onde émise par la source. Dans le cas de la propagation d'un train d'ondes, Lee et Hamilton ont envisagé cette situation et l'ont étudiée numériquement<sup>66,XXI</sup>. La forme du signal obtenue est proche de celle donnée par la formule de Berkta, pour une distance de l'ordre de cent fois la distance de choc.

Evaluons l'ordre de grandeur de la pression auto-démodulée dans les conditions de nos expériences. Nous étudions la propagation, dans l'eau, d'un train d'ondes de fréquence centrale  $f_0 = 10$  MHz, émis par un transducteur plan de rayon  $r_0 = 5$  mm, dont l'amplitude de

---

<sup>XXI</sup> Cette idée est illustrée sur la couverture du livre « Nonlinear acoustics ».

déplacement est d'environ 5 nm. L'amplitude de la pression correspondante est égale à 4,7 MPa. Dans l'eau, le coefficient d'atténuation à cette fréquence est  $\alpha_0 = 2,3$  Np/m, la célérité  $c_0 = 1500$  m/s et le coefficient de non linéarité  $\beta = 3,5^{XXII}$ . Le double opérateur de dérivation peut être interprété comme un facteur homogène au carré d'une pulsation caractéristique. Si l'on considère une durée de train d'ondes  $\Theta = 1\mu s$ , la fréquence associée à l'inverse du double de cette durée, est égale à 500 kHz. A une distance  $z = 34$  cm, la pression auto-démodulée est en conséquence de l'ordre de 3 kPa, soit trois ordres de grandeur inférieure à la pression émise par la source. Si la pulsation tend vers zéro, ce qui revient à considérer une onde harmonique, cette pression s'annule. Nous avons vu au chapitre précédent que, sous l'hypothèse d'une onde plane, la pression associée au déplacement statique cumulatif est alors une pression statique non cumulative proportionnelle au coefficient de non linéarité : la pression de radiation de Rayleigh.

L'expression de Berkta y a été confirmée par les résultats expérimentaux de Mofett *et al*<sup>64, 67</sup>. Froya a ensuite discuté des limites de ce modèle, notamment concernant les effets de l'absorption et de la durée du train d'ondes<sup>68</sup>.

Depuis, d'autres auteurs ont contribué à compléter l'analyse asymptotique de Berkta y. Cervenka et Alais ont pris en compte l'atténuation de la composante auto-démodulée<sup>65</sup>. Gurbatov *et al* ont tenu compte d'une modulation de phase, comme dans le cas de l'émission de signaux dont la fréquence varie dans le temps<sup>69</sup> (lentement par rapport à la fréquence centrale du train d'ondes).

Averkiou, Lee et Hamilton montrent que l'approximation parabolique, qui conduit à l'équation KZK (équation 1.46), permet de décrire le processus d'auto-démodulation dans son ensemble, du champ proche au champ lointain<sup>70</sup>. A l'aide d'un code numérique basé sur la discrétisation de l'équation en pression<sup>71</sup>, ils retrouvent l'ensemble des résultats obtenus précédemment<sup>XXIII</sup>. La souplesse de l'outil numérique leur a permis d'étudier le champ auto-démodulé hors d'axe. De plus, à partir de l'équation KZK, et dans le cadre de l'approximation de faible linéarité, ils ont obtenu une expression analytique intégrale du champ auto-démodulé sur l'axe de propagation. Cette expression coïncide, en champ lointain, avec celles des auteurs précédents.

---

<sup>XXII</sup> Notons que la longueur d'atténuation n'est pas fortement inférieure à la distance de Rayleigh.  $L_{\alpha_0} = 43$  cm et  $L_{HF} = 52$  cm.

<sup>XXIII</sup> Ce code, développé en Fortran lors de la thèse de Y. S. Lee<sup>71</sup>, est téléchargeable à partir de la page de Robin Cleveland : <http://people.bu.edu/robinc/kzk/index.html>.

Au-delà de son application bien connue à l'acoustique sous-marine, le processus d'auto-démodulation a été étudié théoriquement et expérimentalement dans les milieux granulaires non consolidés par Tournat, Castagnède et Gusev<sup>72</sup>. Les milieux granulaires sont complexes puisqu'ils sont à la fois atténuants, dispersifs, multiplement diffuseurs et que la non linéarité est induite par les contacts entre les grains. La spécificité de chacune de ces propriétés conduit à des régimes particuliers. L'objectif est d'extraire, à partir des caractéristiques du champ auto-démodulé, une information sur l'état du milieu. Ces résultats ouvrent des perspectives, notamment pour la compréhension de l'interaction entre une onde acoustique et une fissure (phénomènes de clappement).

Une autre application, selon un principe similaire, concerne la mesure des propriétés poro-élastiques des matériaux. Elle repose sur l'auto-démodulation dans l'air d'une onde ultrasonore. La directivité (élevée en regard de sa fréquence) de la composante auto-démodulée a permis la cartographie de la porosité des matériaux utilisés en acoustique audible<sup>73</sup>.

### **2.2.2. Déplacement auto-démodulé**

Les auteurs mentionnés ci-dessus, pour ceux traitant de l'auto-démodulation non linéaire dans un fluide, ont pour la plupart utilisé un formalisme basé sur une description Eulerienne. Pour plusieurs raisons, nous choisissons d'adopter une description Lagrangienne. D'une part, les équations du mouvement d'une particule étant intrinsèquement Lagrangiennes, cette description favorise une interprétation plus directe des phénomènes. D'autre part elle est adaptée aux conditions de nos expériences (voir paragraphe 2.4). Enfin, elle nous permet de comparer l'expression obtenue pour la contribution non cumulative de la pression auto-démodulée à celle de l'excès moyen de pression intervenant dans la pression de radiation de Rayleigh.

Nous nous intéressons ici à l'auto-démodulation pour de courtes distances séparant la source du récepteur. Cette hypothèse permet d'utiliser dans un premier temps un modèle simple d'onde plane sans atténuation. Les effets de diffraction de la composante auto-démodulée et de l'atténuation, dont les conséquences sont observées expérimentalement, seront étudiés au paragraphe 2.5.

Reprenons l'équation (1.52) de propagation non linéaire d'une onde plane dans un milieu fluide semi-infini sans perte. Dans le cas d'un train d'ondes, le déplacement de la source s'écrit :

$$U(a=0, t) = U_0(t) \sin(\omega_0 t), \quad (2.3)$$

où  $U_0(t)$  représente la modulation d'amplitude. Celle-ci est supposée lentement variable par rapport à la période  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  du train d'onde. Dans le but d'établir une solution approchée, nous faisons à nouveau l'hypothèse d'une faible non linéarité. Cette approximation de quasi-linéarité,  $U = U_1^{(\varepsilon)} + U_2^{(\varepsilon^2)}$ , n'est valable que pour des distances bien en deçà de la distance de choc. Puisque nous négligeons l'atténuation, la formation d'une onde de choc invalide cette hypothèse pour des distances plus importantes. Introduisons à nouveau le temps retardé  $\tau = t - a/c_0$ . Compte tenu de l'égalité suivante :

$$\frac{1}{c_0} \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)_a + \left( \frac{\partial U}{\partial a} \right)_t = \left( \frac{\partial U}{\partial a} \right)_\tau, \quad (2.4)$$

l'équation (1.52) au second ordre en nombre de Mach  $\varepsilon$  s'écrit :

$$\left( \frac{\partial U_2}{\partial a} \right)_\tau = \frac{\beta}{2} \left( \frac{\partial U_1}{\partial a} \right)_\tau^2. \quad (2.5)$$

Nous supposons que l'onde primaire  $U_1$  se propage sans être déformée (ce qui revient à écrire que  $\partial U_0(\tau)/\partial a = 0$ ), hypothèse légitime dans le cadre de la propagation linéaire d'une onde plane. En omettant le terme non linéaire correspondant à la seconde harmonique, l'équation (2.5) devient, au second ordre en  $\varepsilon$  :

$$\left( \frac{\partial U_2}{\partial a} \right)_\tau = \frac{\beta \omega_0^2}{4c_0^2} U_0^2(\tau). \quad (2.6)$$

Le déplacement de basse fréquence  $U_{BF}$  de la particule fluide qui se trouve initialement à la distance  $z$  de la source se déduit par intégration de l'équation (2.6) :

$$U_{BF}(a=z, t) = \frac{\beta}{4} k_0^2 z U_0^2 \left( t - \frac{z}{c_0} \right), \quad (2.7)$$

où  $k_0 = \omega_0/c_0$  est le vecteur d'onde. Cette composante de basse fréquence du déplacement, nulle à la source, croît linéairement en fonction de la distance de propagation. Elle est proportionnelle au carré de l'amplitude de la source ainsi qu'au coefficient de non linéarité. Il s'agit donc bien d'un processus non linéaire quadratique et cumulatif.

### 2.2.3. Cas limite d'une onde plane harmonique : déplacement statique

Considérons le cas limite d'une onde plane harmonique. L'amplitude  $U_0$  est alors indépendante du temps et le déplacement de basse fréquence devient le déplacement statique (de fréquence nulle), introduit au premier chapitre. Ce cas particulier illustre bien l'action de la non linéarité de la propagation de l'onde sur une particule de fluide qui se trouve, au repos, à la distance  $z$ . Cette particule est animée d'un mouvement vibratoire à la fréquence de l'onde primaire (et de ses harmoniques) ; cette vibration ne se produit pas autour de la position d'équilibre, mais autour d'une nouvelle position (figure 2.1). Son déplacement total s'écrit, puisque le principe de superposition reste valable dans l'hypothèse quasi-linéaire :

$U = U_S + U_D$ , où  $U_S(a = z, t) = \frac{\beta}{4} k_0^2 z U_0^2$  désigne le déplacement statique (équation 1.56) et

$$U_D(a = z, t) \cong U_0 \sin\left(\omega_0\left(t - \frac{z}{c_0}\right)\right) - \frac{\beta}{4} k_0^2 z U_0^2 \cos\left(2\omega_0\left(t - \frac{z}{c_0}\right)\right), \quad (2.8)$$

le déplacement dynamique.

La particule est ainsi déplacée vers une nouvelle position  $z + U_S$ , qui dépend des propriétés non linéaires du milieu et des caractéristiques de la source (puissance et fréquence de l'onde émise). De plus, l'amplitude de ce déplacement croît linéairement avec la distance séparant la source de la particule considérée. Notons que ce déplacement ne résulte pas d'un transfert de quantité de mouvement de l'onde au fluide, ce dernier étant supposé non atténuant. Il faut donc le distinguer du « streaming » acoustique (cf. chapitre 3), écoulement d'origine acoustique rencontré dans les fluides absorbant. Nous insistons aussi sur le fait que cette translation n'est pas seulement le fruit d'un mouvement de convection du milieu lors du passage de l'onde : elle résulte aussi de la non linéarité thermodynamique. Un cas particulier qui permet de l'attester est celui d'un déplacement statique induit par la propagation non linéaire d'une onde dans la silice fondue<sup>74,75</sup>. Ce matériau possède la particularité d'avoir un coefficient de non linéarité négatif ( $\beta_{\text{silice}} \approx -7$ ). Le déplacement statique de la particule solide ( $U_S$ ), est donc de signe opposé à celui mesuré dans un matériau dont le coefficient  $\beta$  est positif. En conséquence, la particule solide se rapproche de la source. Les phénomènes tels que la convection de l'onde ou le transfert de quantité de mouvement ne peuvent expliquer le signe de ce déplacement.

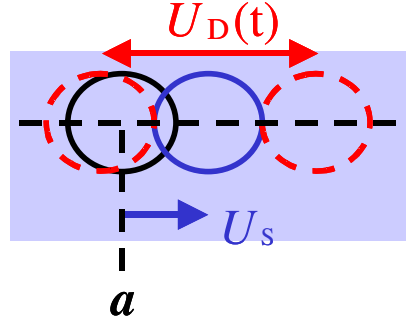


Figure 2.1 : Illustration de l'action de la non linéarité de la propagation de l'onde sur une particule fluide. Si la particule est au repos en  $a$ , elle se trouve, du fait de l'onde, animée d'un mouvement oscillatoire ( $f_0, 2f_0 \dots$ ), mais elle est aussi déplacée par rapport à sa position d'équilibre.

Ce raisonnement est aussi applicable au cas où l'onde n'est pas strictement harmonique : s'il s'agit d'un train d'ondes de forme rectangulaire dont la durée est suffisamment longue pour qu'un régime permanent puisse s'établir, la particule se trouve animée de la combinaison de ces deux mouvements (translation et vibration) pendant une durée égale à celle du train d'ondes. Elle retrouve ensuite sa position de départ. Cette question sera examinée dans le paragraphe consacré à la pression associée à ce déplacement quasi-statique.

Nous verrons au cours du prochain paragraphe qu'il n'est pas possible de mesurer un déplacement statique avec notre configuration expérimentale. De plus, et nous l'illustrerons par des résultats de simulations numériques, les effets de diffraction n'autorisent pas l'existence d'une telle composante dans le cas d'une onde harmonique. L'utilisation d'un train d'ondes s'impose donc pour l'observer. Elle offre l'avantage de permettre une analyse en ondes planes valable en champ proche.

#### 2.2.4. Ordres de grandeur

Dans un fluide réel, les effets thermo-visqueux doivent *a priori* être pris en compte, et l'absorption et la non linéarité sont deux effets antagonistes. En particulier, dans l'eau, l'amplitude du déplacement de basse fréquence  $U_{BF}$  et le coefficient d'absorption varient tous les deux comme le carré de la fréquence. Expérimentalement, il faut donc que la fréquence de l'onde primaire soit telle que l'amplitude du déplacement de basse fréquence soit suffisante pour être mesurable avec une bonne précision, tout en évitant une atténuation trop importante, qui limiterait les effets non linéaires.

Par exemple, dans l'eau, si l'amplitude du déplacement de l'onde primaire est  $U_0 = 5$  nm, à la fréquence  $f_0 = 10$  MHz ( $\alpha_0 = 2,4$  Np/m), un déplacement de basse fréquence d'amplitude

1 nm est attendu à la distance  $z = 25$  mm de la source. En comparaison, l'atténuation de l'onde primaire n'est que de 0,5 dB (multiplication par un facteur 0,944) à cette distance. Ce déplacement de basse fréquence de la particule est donc d'une amplitude inférieure à celle de la vibration. Nous allons voir que de tels déplacements sont mesurables à l'aide d'un interféromètre optique hétérodyne, tel que celui développé par Daniel Royer au laboratoire.

## **2. 3. Mesures optiques de champs acoustiques**

### **2. 3.1 Sondes interférométriques optiques.**

Malgré leur relative complexité, les interféromètres optiques sont de plus en plus utilisés car ils offrent plusieurs avantages par rapport aux hydrophones traditionnels. Ils possèdent une meilleure résolution spatiale (inférieure à 50  $\mu\text{m}$ ), une bonne sensibilité et une large bande passante, notamment dans le domaine des basses fréquences. Les méthodes d'interférométrie optique permettent la mesure absolue de déplacements de faible amplitude, inférieure à l'angström ( $10^{-10}$  m), pour une gamme de fréquences allant de quelques centaines de Hz à 50 MHz<sup>76</sup>. Ces avantages font de l'interférométrie optique la méthode de référence pour la caractérisation des transducteurs ultrasonores<sup>77</sup> ou pour la calibration des hydrophones<sup>78,79</sup>. Appliquée à l'inspection de la surface de solides, elle est bien adaptée à l'étude de la propagation des ondes sur des surfaces courbes ou des ondes de Lamb dans des plaques minces<sup>80</sup>. Ainsi, de faibles variations d'épaisseur sur une plaque (inférieures à cent nanomètres), ont été relevées par la mesure optique des variations de la fréquence de résonance du mode S1, dont la vitesse de groupe s'annule<sup>81</sup>.

Dans le domaine de l'acoustique non linéaire, où des mesures d'amplitude précises et absolues sont indispensables, les méthodes optiques sont très utiles. Pour la mesure du coefficient de non linéarité par génération d'harmoniques, elles permettent la mesure simultanée de la fréquence fondamentale et de la seconde harmonique<sup>82</sup>. Elles sont aussi applicables à la mesure du décalage de fréquence intervenant dans les méthodes de détection par résonances de l'endommagement. Des essais ont par exemple été réalisés pour déterminer le coefficient de non linéarité hystérétique de l'os trabéculaire<sup>83</sup>. Elles font aussi partie du dispositif de mesure du coefficient de non linéarité des solides par interaction d'ondes<sup>84</sup> ou du déplacement associé à la contrainte de radiation dans les solides<sup>75</sup>.

### 2.3.2. Principe de l'interféromètre optique hétérodyne

Il existe différents dispositifs de détection optique d'ondes acoustiques. Leur fonctionnement repose soit sur la mesure de la composante normale de la vitesse de déplacement mécanique d'une surface, soit directement sur la mesure du déplacement de cette surface. La sonde utilisée fait partie de cette seconde catégorie. Elle a déjà été amplement décrite<sup>85</sup>. Nous en rappelons ici brièvement le principe de fonctionnement.

Le principe général de l'interféromètre est schématisé sur la figure 2.2. Il consiste à mesurer la différence de trajet entre un faisceau lumineux de référence et le faisceau sonde, dirigé vers un objet vibrant, sur la surface duquel il est réfléchi. Un laser de quelques milliwatts de puissance émet une onde lumineuse harmonique de fréquence  $f_L$ . A la traversée d'un cube séparateur de puissance, ce faisceau est scindé en deux. Le faisceau de référence, représenté en bleu sur la figure 2.2, est dirigé à l'aide d'un prisme de Dove vers la photo-diode. Le faisceau sonde, passe à travers un modulateur acousto-optique colinéaire de fréquence  $f_B = 70$  MHz, qui a pour effet de décaler sa fréquence, alors égale à  $f_L + f_B$ . La polarisation linéaire « horizontale » (dans le plan de la figure) du faisceau sonde est rendue circulaire par passage au travers d'une lame quart d'onde. A l'aide d'une lentille convergente, le faisceau sonde est ensuite focalisé sur l'objet dont la surface vibre à une fréquence centrale  $f_0$ . La composante normale  $U(t)$  du déplacement de la surface module la phase du faisceau. La réflexion change le sens de la polarisation circulaire, qui devient linéaire « verticale » par un nouveau passage à travers la lame quart d'onde. Un cube séparateur de polarisation oriente le faisceau modulé vers la photo-diode. Un analyseur sélectionne alors les polarisations (des faisceaux sonde et de référence) à  $45^\circ$ , afin que ces deux faisceaux interfèrent sur le photo-détecteur.

Le courant de la photodiode est constitué d'une partie alternative  $i(t)$  qui oscille à la fréquence  $f_B$  et dont la phase est modulée par la composante normale du déplacement de la surface de l'objet :

$$i(t) \propto I_0 \cos(\omega_B t + \phi_S - \phi_R + 2KU(t)), \quad (2.9)$$

où  $\phi_S$  et  $\phi_R$  sont respectivement le déphasage du faisceau sonde et du faisceau de référence,  $K$  est le nombre d'onde du faisceau laser He-Ne, dont la longueur d'onde est  $\lambda = 633$  nm.



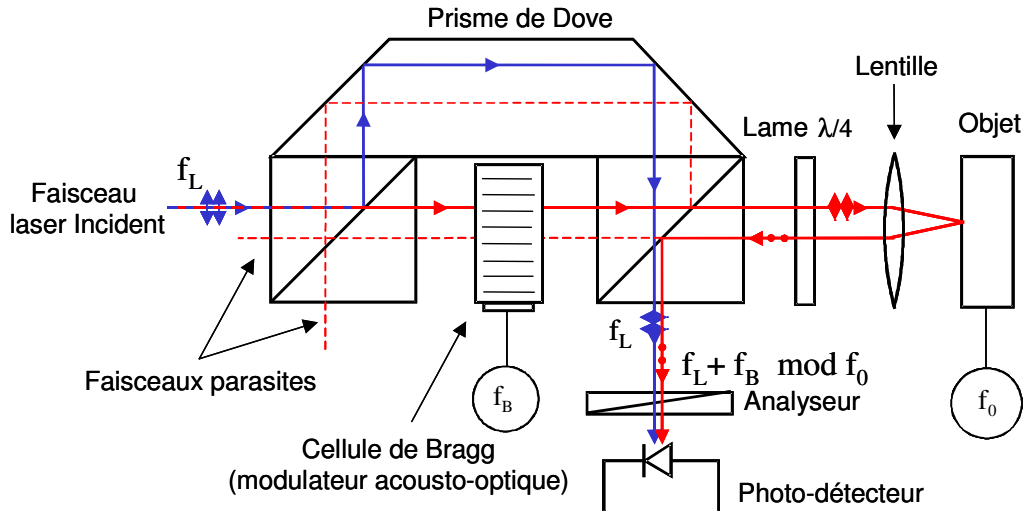


Figure 2.2 : Schéma du montage optique de l'interféromètre hétérodyne

Pour extraire le déplacement de la surface provoqué par l'onde ultrasonore, il faut donc démoduler le photo-courant  $i(t)$ . La modulation de phase se traduit spectralement par la présence de bandes latérales situées de part et d'autre de la raie correspondant à la fréquence de la porteuse. Le spectre du photo-courant se décompose en série de fonction de Bessel. Si le déplacement de la surface est harmonique à la fréquence  $f_0$  et si l'amplitude du déplacement est petite devant la longueur d'onde  $\Lambda$ , le développement en fonction de Bessel peut être limité à l'ordre un. L'amplitude du déplacement se déduit alors du rapport des amplitudes spectrales à la fréquence  $f_B$  de la porteuse et celle à la fréquence  $f_B + f_0$ . L'électronique de la démodulation analogique présentée ci-dessous est calibrée de cette façon.

### 2.3.3. Détection optique de champs ultrasonores dans l'eau

Dans nos expériences, la sonde optique est utilisée pour mesurer le champ de déplacement rayonné par un transducteur dans l'eau. A cette fin, elle est couplée à une très fine membrane de Mylar métallisée, nécessaire pour matérialiser le déplacement du fluide soumis à l'onde, et réfléchir le faisceau laser<sup>XXIV</sup> (cf. figure 2.3). L'impédance caractéristique du Mylar, proche de celle de l'eau ( $Z_{\text{Mylar}} = 2,9 \text{ MRayl}$ ), et son épaisseur ( $e = 12 \mu\text{m}$ ) sont telles que celle-ci peut être considérée comme transparente aux ultrasons dans une gamme de fréquence allant de 100 kHz à 20 MHz<sup>86</sup>.

<sup>XXIV</sup> Le faisceau laser étant de faible puissance, la pression de radiation lumineuse sur la membrane de Mylar est négligeable.

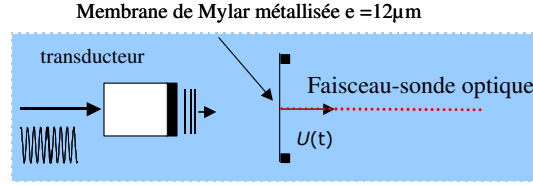


Figure 2.3 : Configuration expérimentale de détection optique de champs ultrasonores dans l'eau.

Ainsi, le faisceau-sonde optique traverse le fluide lors de son trajet, dont l'indice de réfraction ( $n_{\text{eau}} = 1,33$ ) est différent de celui de l'air ( $n = 1$ ), et l'onde acoustique engendre une variation de pression sur le trajet retour qu'empreinte le faisceau optique. Si l'onde est plane et colinéaire au faisceau-sonde, ceci a pour conséquence de modifier l'indice optique de l'eau « vu par le faisceau laser ». L'indice effectif résultant devient alors très proche de celui de l'air :  $n_{\text{eff}} \cong 1$ <sup>78,87</sup>.

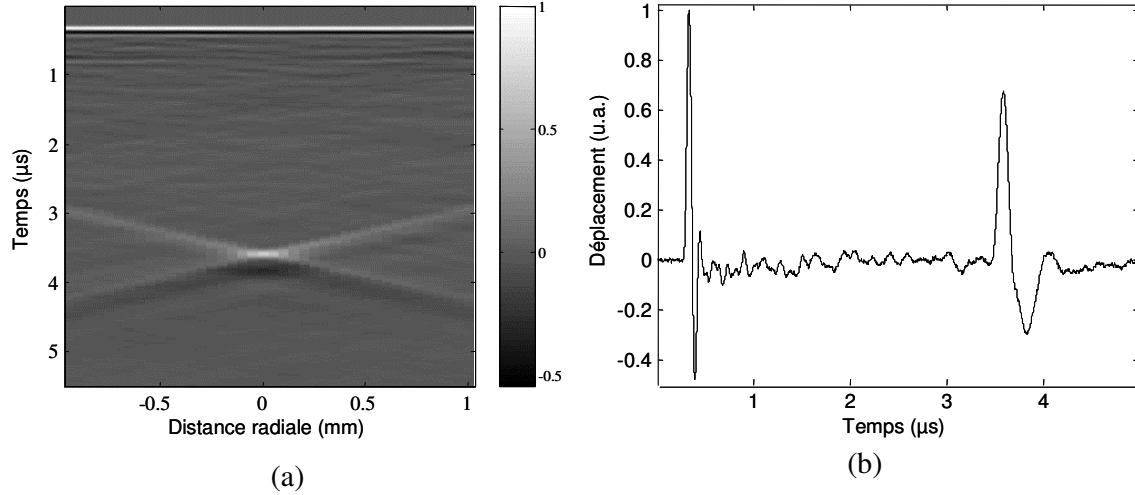


Figure 2.4 : Déplacement mesuré pour une distance transducteur membrane inférieure à 1 mm.  
(a) Représentation spatio-temporelle. (b) Déplacement mesuré au centre du faisceau.

La figure 2.4 montre le déplacement détecté dans la configuration expérimentale de la figure 2.3, lorsqu'un transducteur circulaire plan émet une impulsion. La membrane étant placée à moins d'un millimètre de la surface du transducteur, l'onde de bord est détectée sous une incidence oblique très favorable à l'interaction acousto-optique (maximale lorsque les ondes optique et acoustique se propagent perpendiculairement) Le déplacement associé à l'onde de bord change alors de signe et son amplitude est amplifiée par rapport à celui de l'onde plane<sup>86</sup> (figure 2.3). Cet effet diminue rapidement lorsque la distance transducteur-membrane augmente. Pour s'affranchir de l'interaction acousto-optique, une alternative consiste à placer la membrane à l'interface eau/air. Ainsi le trajet retour du faisceau laser, de la membrane à la sonde, a lieu dans l'air, où la transmission des ultrasons est négligée. En contrepartie la

membrane n'est plus transparente. La réflexion de l'onde ultrasonore complique l'interprétation des phénomènes en termes de pression de radiation. Nous n'avons donc pas retenu cette configuration.

### 2.3.4. Traitement des signaux

Dans le cas de signaux dont la durée est limitée dans le temps, une méthode de démodulation est nécessaire pour extraire du photo-courant (2.9) le déplacement de la surface examinée. Deux variantes, l'une analogique, l'autre numérique, ont été utilisées.

#### 2.3.4.1. Démodulation analogique.

Le schéma du circuit analogique de détection de la phase est représenté sur la figure 2.5. Le photo-courant  $i(t)$  est séparé en deux à l'aide d'un diviseur de puissance. Une partie du signal est filtrée passe-bande à  $f_B \pm 10$  kHz afin de reconstituer une porteuse de référence en éliminant la modulation de phase. Ce filtrage est suivi d'une ligne à retard calculée pour obtenir une porteuse reconstituée de  $\pi/2$  par rapport au signal modulé en phase à l'entrée du mélangeur. Les deux signaux sont multipliés à l'aide d'un mélangeur (composant non linéaire). En sortie du mélangeur, le signal est filtré passe-bas de façon à éliminer la composante de haute fréquence résultant de la multiplication et à réduire le bruit. Le signal est ainsi proportionnel au sinus de la modulation de phase. Dans le cas où les déplacements sont faibles, le sinus est assimilé à son argument, de sorte que le signal de sortie est proportionnel à la modulation de phase  $\Delta\Phi(t) = 2KU(t)$  :

$$s(t) \cong C \sin(\Delta\Phi(t)) \approx C \Delta\Phi(t), \quad (2.10)$$

où  $C$  est le facteur de calibration de l'électronique. Dans nos expériences d'auto-démodulation, un train d'ondes de fréquence centrale  $f_0 = 10$  MHz est initialement émis dans l'eau. Afin d'isoler la composante de basse fréquence  $U_{BF}$  (équation 2.7) du déplacement total  $U$ , la porteuse est tout d'abord filtrée passe-bande à  $70 \pm 5$  MHz avant sa démodulation et le signal est aussi filtré passe-bas en sortie du circuit de démodulation (partie du circuit en pointillés rouges sur la figure 2.5). La présence des filtres modifie le facteur de calibration  $C$  du dispositif, qui doit donc être remesuré.

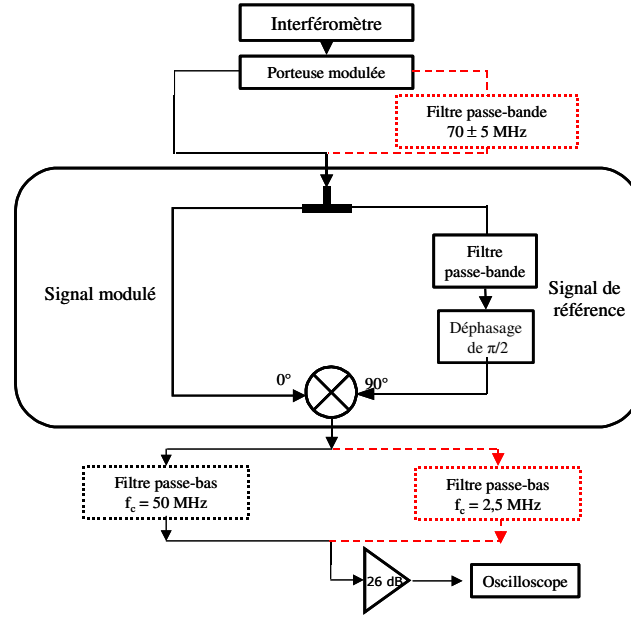


Figure 2.5 : Circuit de démodulation analogique du photo-courant  $i(t)$ . Le circuit permettant d'isoler la composante de basse fréquence  $U_{BF}$ .

La démodulation analogique dispense d'une mesure précise de la fréquence de modulation  $f_B$  et permet, dans une certaine mesure, de s'affranchir des fluctuations du niveau de la porteuse. Elle impose par contre, du fait de la bande-passante du filtre utilisé pour reconstituer la porteuse de référence, une limite inférieure à la fréquence du déplacement détectable. Une alternative consiste à démoduler numériquement le photo-courant.

#### 2.3.4.2. Démodulation numérique

Le schéma de la démodulation numérique est représenté sur la figure 2.6. Dans cette configuration, la porteuse modulée est numérisée par un oscilloscope. Le traitement du signal se fait sous Matlab. Le signal analytique  $S_{analytique}$ , associé à la porteuse, est obtenu à l'aide d'une transformée de Hilbert. Il est ensuite filtré passe-bande autour de  $f_B$ , les fréquences de coupure étant choisies en fonction de l'objectif : éliminer le bruit (filtre  $f_B \pm 25$  MHz) ou isoler la composante de basse fréquence du déplacement (filtre  $f_B \pm 3$  MHz). Au préalable, la fréquence de la porteuse non modulée est mesurée précisément, afin synthétiser le signal analytique de référence  $S_{ref}$ , dont la phase est ensuite conjuguée. Les deux signaux sont ensuite multipliés, puis la phase du signal analytique résultant est alors simplement déroulée. Cette méthode est avantageuse car elle fournit une mesure absolue du déplacement sans nécessiter de calibration. L'absence de filtrage pour la reconstitution de la porteuse de référence autorise par ailleurs la mesure des composantes de plus basse fréquence que par la méthode analogique.

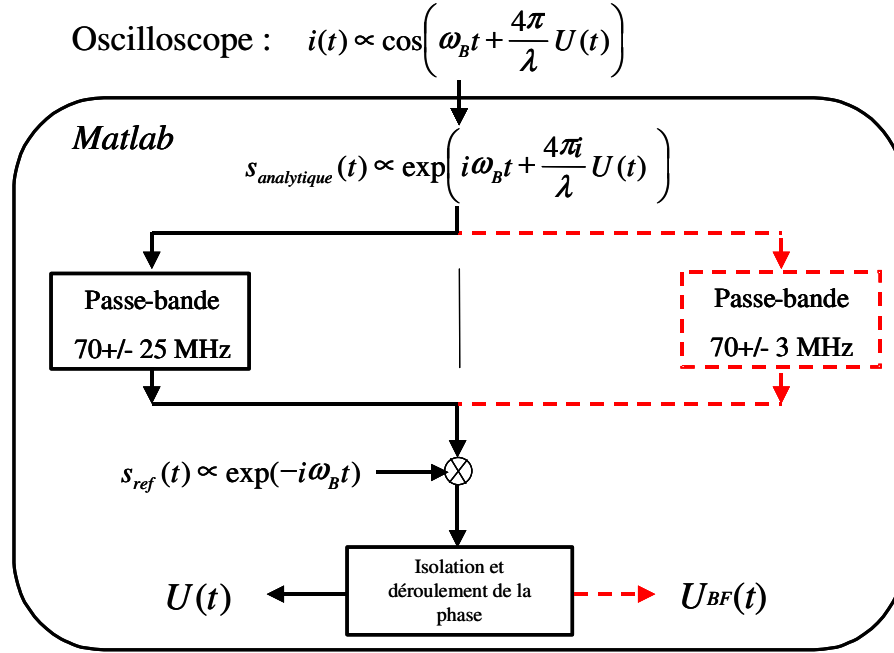


Figure 2.6 : Schéma de la démodulation numérique. Le circuit permettant d'isoler la composante de basse fréquence  $U_{BF}$  est représenté en pointillés rouges.

## 2.4. Mesure du déplacement auto-démodulé par interférométrie optique

### 2.4.1. Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est représenté sur la figure 2.7. Le transducteur (plan ou focalisé) est placé dans une cuve remplie d'eau, munie d'une fenêtre optique (traitée pour réduire les réflexions), dont les dimensions sont très supérieures à celles du faisceau acoustique. Il est monté sur une plate-forme micrométrique motorisée permettant des déplacements selon trois axes perpendiculaires. Il émet un train d'ondes, obtenu par multiplication, à l'aide d'un mélangeur, d'un signal harmonique de fréquence  $f_0 = 10$  MHz (dans les premières expériences) avec une enveloppe délivrée par un générateur programmable. La forme et la durée de l'enveloppe sont ajustables.

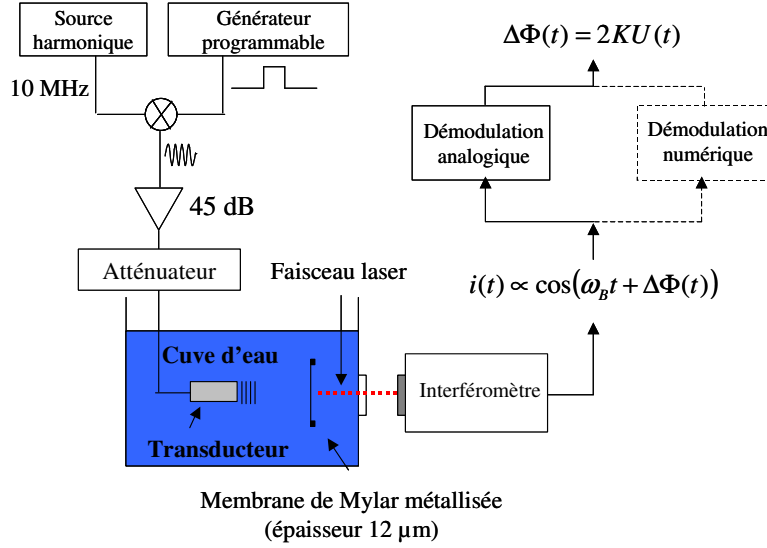


Figure 2. 7: Dispositif expérimental utilisé pour la mesure des déplacements mécaniques.

L'amplitude du train d'ondes est ensuite amplifiée avec un gain pouvant atteindre 45 dB et contrôlée à l'aide d'un atténuateur variable. Avant son application au transducteur, le signal électrique est filtré passe bande de façon à éliminer les éventuelles composantes engendrées non linéairement par le dispositif d'émission<sup>xxv</sup>. Un exemple de signal d'excitation est représenté sur la figure 2.8.

Les déplacements induits par l'onde ultrasonore sont mesurés à l'aide de l'interféromètre optique couplé à une membrane de Mylar immergée, selon le principe décrit plus haut (cf. 2. 3. 3.). Le mouvement de la membrane provoqué par l'onde ultrasonore module la phase du faisceau optique, selon la relation :

$$\Delta\Phi(t) = 2K_{eff}U(t), \quad (2.11)$$

où  $K_{eff} = 2\pi n_{eff}/\Lambda$  est le nombre d'onde effectif du faisceau laser, qui tient compte de la modification de l'indice de réfraction optique de l'eau due à l'interaction acousto-optique (cf. 2.3.3). La modulation de phase est extraite à l'aide de l'un des deux dispositifs présentés plus haut. (cf. 2. 3.4).

<sup>xxv</sup> Ce filtrage vise à éliminer non seulement les harmoniques supérieures, mais aussi une éventuelle composante de basse fréquence émise par le transducteur.

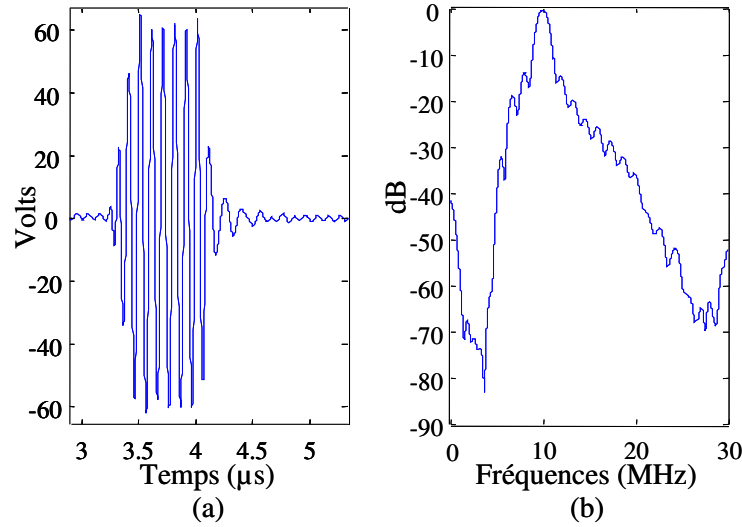


Figure 2.8 : Exemple du signal électrique d'excitation (a) et spectre correspondant (b). On vérifie sur le spectre que les composantes engendrées non linéairement sont négligeables.

Ce dispositif expérimental conduit à la mesure du déplacement d'une particule fluide fixée. De plus, comme la membrane de Mylar a une épaisseur faible et que son impédance est proche de celle de l'eau, l'absence d'onde réfléchie garantit la mesure de quantités lagrangiennes.

### 2.4.2. Résultats expérimentaux en champ proche

Les premières expériences sont réalisées à l'aide d'un transducteur plan de fréquence nominale  $f_0 = 10$  MHz et de diamètre 10 mm émettant un train d'ondes. L'enveloppe du train d'ondes est rectangulaire, afin d'étudier la conséquence de l'existence d'un régime permanent sur le déplacement auto-démodulé. La durée  $\Theta$  choisie pour le train d'ondes est le résultat d'un compromis entre un régime de diffraction quasi-impulsionnel du train d'ondes de haute fréquence, qui nous permet de mesurer l'amplitude  $U_0$  près de la source, avec un spectre dont la bande est suffisamment étroite afin que le déplacement de basse fréquence soit clairement identifiable. De plus, un signal de durée  $\Theta$  suffisamment courte permet d'augmenter la distance caractéristique de la diffraction de la composante de basse fréquence et réduit les effets de streaming acoustique (cf. 3.1).

Sur la figure 2.9 sont reportées les représentations spatio-temporelles du déplacement total  $U$  et de sa composante de basse fréquence  $U_{BF}$  induits par le train d'ondes pour une distance transducteur-membrane  $z$  égale à 3 mm. La composante de basse fréquence du déplacement possède bien la forme rectangulaire de l'enveloppe. On constate qu'à cette distance son

amplitude est assez faible ( $U_{BF} < 1\text{nm}$ ), mais d'ores et déjà mesurable avec un bon rapport signal sur bruit. En plaçant le transducteur le plus près possible de la membrane, nous avons vérifié qu'aucune composante de basse fréquence n'est détectée. Cette dernière n'est donc pas directement émise par le transducteur. L'extension spatiale de la composante de basse fréquence est égale au diamètre du transducteur.

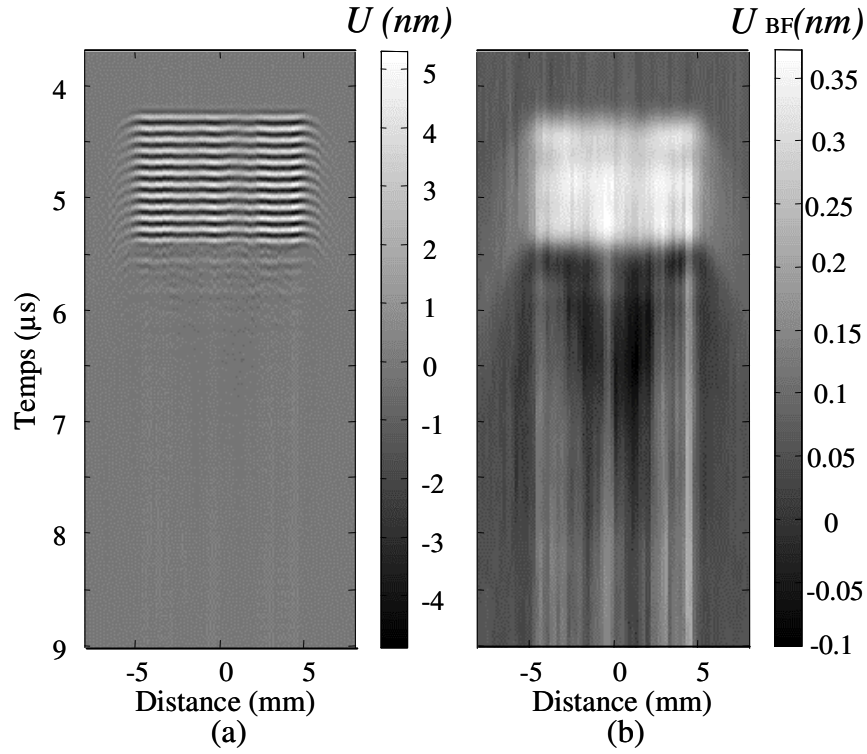


Figure 2.9: Représentations spatio-temporelles du déplacement  $U$  (a) et de sa composante de basse fréquence  $U_{BF}$  (b).

Sur la figure 2.10, nous avons représenté les déplacements en fonction du temps, mesurés pour  $z = 3$  mm au centre du transducteur, pour différentes amplitudes d'émission. Deux durées  $\Theta$  du train d'ondes sont représentées (1 et 2  $\mu\text{s}$ ). Comme le prévoit le modèle en onde plane, valable à cette distance, ni l'amplitude du déplacement de basse fréquence ni sa forme ne sont fonction de la durée du train d'ondes, contrairement aux conclusions de Yost et Cantrell, à propos de mesures effectuées dans des solides<sup>74</sup>. L'amplitude du déplacement de basse fréquence dépend quadratiquement de l'amplitude de la source. Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus dans les solides par X. Jacob *et al*<sup>75</sup>.



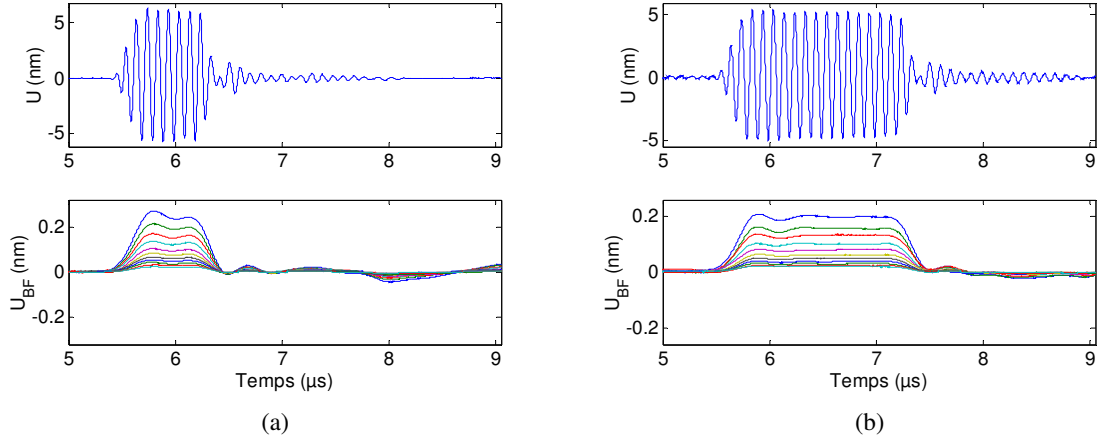


Figure 2.10 : Déplacement du train d'ondes  $U(t)$  et de sa composante de basse fréquence  $U_{BF}(t)$ , pour une distance  $z = 3$  mm, et pour différentes amplitudes d'excitation. Les durées  $\Theta$  des trains d'ondes sont respectivement  $1 \mu s$  (a) et  $2 \mu s$  (b).

Cette expérience met en évidence l'existence, dans le cas d'une enveloppe rectangulaire, d'une composante quasi-statique du train d'ondes. L'interprétation donnée dans la partie 2.2.3 dans le cas d'une onde plane harmonique reste donc valable en dehors du régime transitoire du train d'ondes. La particule, lors du passage de l'onde, est non seulement animée d'un mouvement vibratoire à la fréquence  $f_0$  (et à ses fréquences harmoniques), mais est aussi traduite par rapport à sa position d'origine. Située en  $a = z$  avant le passage de l'onde, elle oscille autour de la position  $a' = z + U_{BF}$  pendant une durée légèrement inférieure à la durée  $\Theta$  du train d'ondes, compte-tenu de la durée des transitoires.

A la distance  $z = 22$  mm, la forme temporelle du déplacement de basse fréquence a changé (figure 2.11). Elle tend vers la dérivée temporelle de la forme rectangulaire observée près de la source. En acoustique linéaire, il s'agit d'une conséquence caractéristique d'un régime impulsionnel de diffraction : en champ lointain, la réponse impulsionnelle de diffraction pour le déplacement est constituée de deux impulsions de Dirac de signes opposés, dont le décalage temporel de l'une par rapport à l'autre décroît au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la source<sup>88</sup>. Convoluee avec le signal de déplacement, la réponse impulsionnelle de diffraction tend à agir comme un opérateur de dérivation temporelle en champ lointain.

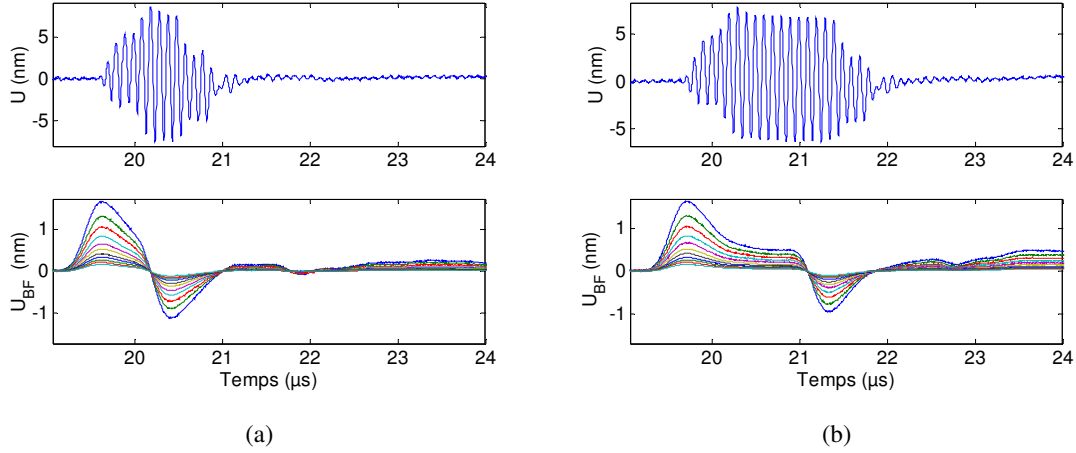


Figure 2.11 : Déplacement du train d'ondes  $U(t)$  et de sa composantes de basse fréquence  $U_{BF}(t)$ , pour une distance  $z = 22$  mm et pour différentes amplitudes d'excitation. La durée du train d'ondes est respectivement  $\Theta = 1 \mu s$  (a) et  $\Theta = 2 \mu s$  (b).

Afin de mieux caractériser le régime de diffraction de la composante de basse fréquence, nous avons effectué des mesures en plaçant la membrane au foyer d'un transducteur focalisé (diamètre  $d = 10$  mm, fréquence nominale  $f_0 = 10$  MHz). En dépit de l'effet du filtrage lié à la bande passante finie de la détection, le signal obtenu est relativement proche de la dérivée de l'enveloppe du train d'ondes (cf. figure 2.12), ce qui confirme l'hypothèse d'un régime de diffraction impulsif.

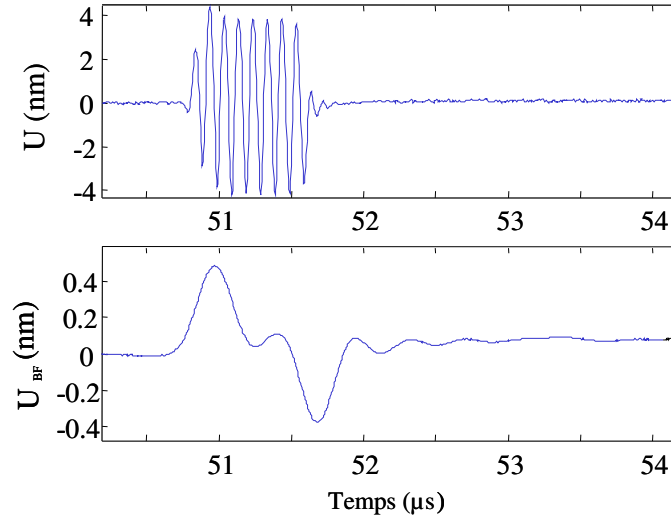


Figure 2.12: Déplacements du train d'ondes  $U$  et de sa composante de basse fréquence  $U_{BF}$ , mesurés à la distance focale d'un transducteur ( $d = 10$  mm,  $f_0 = 10$  MHz).

La diffraction du déplacement auto-démodulé a pour conséquence d'annuler la composante quasi-statique, observée près de la source. Ce constat sera repris lors de l'interprétation des expériences en termes de pression de radiation.

Sur la représentation spatio-temporelle de la figure 2.13, une contribution supplémentaire au déplacement de basse fréquence est clairement observable. Elle présente une extension latérale qui correspond à la largeur de la tache focale, mais son extension temporelle est bien plus longue que celle du train d'ondes. Ce déplacement de la membrane, qui semble apériodique, est causé par un transfert de quantité de mouvement de l'onde vers le milieu de propagation, connu sous le nom de « streaming acoustique ». Ce transfert est produit par l'atténuation de l'onde, qui donne lieu à un écoulement (d'origine acoustique). Il est abordé dans la partie 3.1.

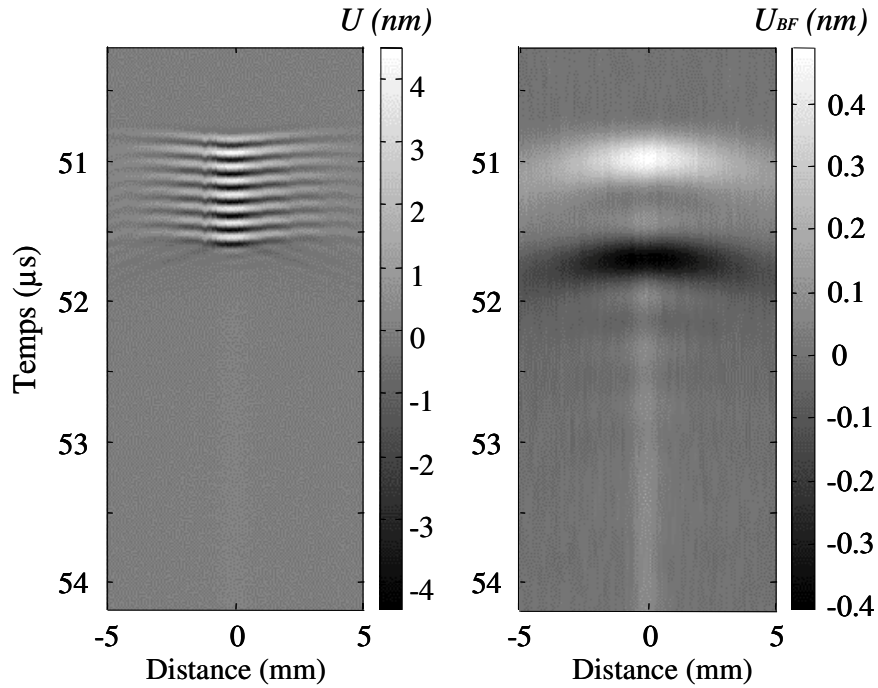


Figure 2.13 : Représentations spatio-temporelles du déplacement du train d'ondes  $U$  (a) et de sa composante de basse fréquence  $U_{BF}$  (b) mesurés au foyer d'un transducteur focalisé.

La figure 2.14. représente l'évolution de l'amplitude de  $U_{BF}$  en fonction de la distance  $z$  séparant le transducteur plan de la membrane dans le cas d'un train d'ondes de durée  $\Theta = 1 \mu s$ . L'amplitude croît linéairement jusqu'à une distance d'environ  $z = 25$  mm, à partir de laquelle le processus cumulatif est limité par la diffraction de la composante de basse fréquence. La distance de Rayleigh,  $L_{BF} = \frac{\pi d^2}{8\theta c_0}$ , calculée en considérant que le déplacement de basse fréquence a été émis par le transducteur et se propage de façon linéaire, est tout à fait comparable, elle vaut 26 mm.

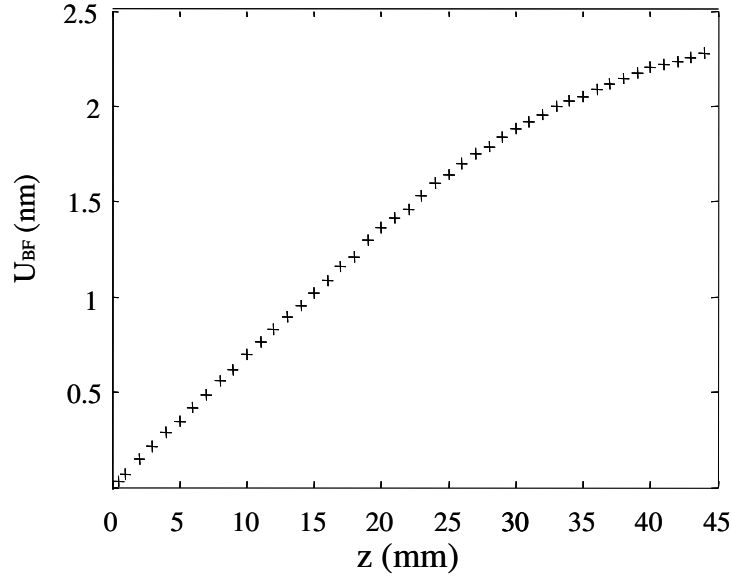


Figure 2.14 : Evolution de l'amplitude de la composante de basse fréquence  $U_{BF}$  en fonction de la distance de propagation  $z$ .

Signalons qu'en augmentant la durée  $\Theta$ , la distance à partir de laquelle l'amplitude du déplacement BF ne croît plus linéairement est réduite. La longueur d'atténuation et la distance de Rayleigh du train d'ondes primaires sont respectivement  $L_a = 1/\alpha_0 = 42$  cm et  $L_{HF} = 52$  cm. Il semble donc que l'effet qui limite le processus cumulatif soit la diffraction de la composante de basse fréquence. Les simulations réalisées à l'aide du code numérique basé sur la discrétisation de l'équation KZK, dont les résultats sont présentés lors de la partie 2.5, permettent d'étudier cet aspect plus en détail.

### 2.4.3. Mesures en champ lointain

A l'aide du même transducteur plan, nous avons mesuré dans l'eau et sans filtrage supplémentaire, le déplacement total à une distance  $z$  égale à 34 cm. Le signal obtenu pour une fréquence centrale du train d'ondes de 6 MHz est représenté sur la figure 2.15 (a). On constate que le déplacement auto-démodulé possède une amplitude supérieure à celle de la composante primaire, mais que cette dernière n'est pas totalement atténuée. Ceci n'est pas surprenant puisque pour une fréquence de 6 MHz, la longueur d'atténuation est  $L_a = 1,16$  m. En comparaison, le signal obtenu pour un train d'ondes dont la fréquence centrale est 15 MHz ( $L_a = 0,19$  m) est représenté sur la figure 2.15 (b). Cette fois la composante primaire a complètement disparu et seul le déplacement auto-démodulé subsiste.

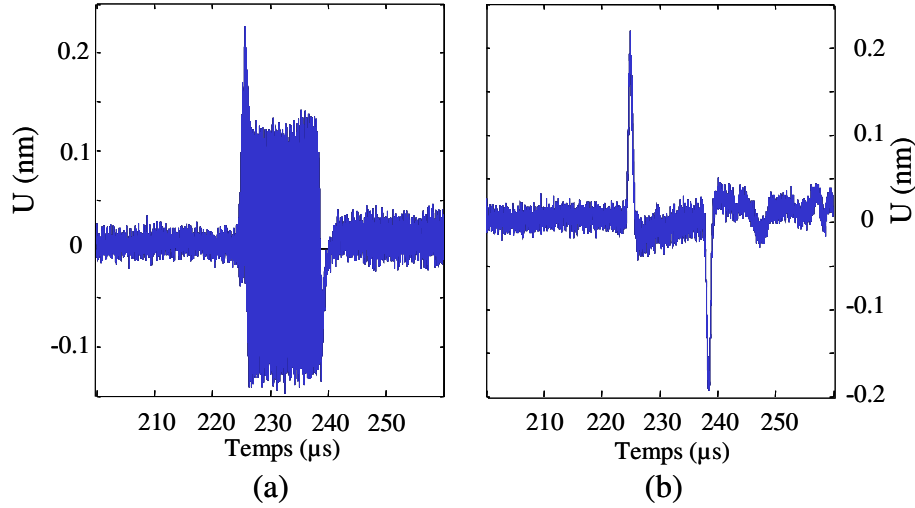


Figure 2.15: Déplacement total  $U$ , mesuré dans l'eau (sans filtrage supplémentaire) à une distance de la source  $z = 34$  cm. (a) Train d'ondes de fréquence centrale 6 MHz. (b) Train d'ondes de fréquence centrale 15 MHz.

Du fait de l'absence de filtrage nécessaire à son observation, le signal résiduel ressemble plus nettement aux deux impulsions de Dirac théoriques du déplacement de basse fréquence diffracté. Ceci correspond à l'expression asymptotique formulée par Berkay, pour laquelle la pression auto-démodulée est proportionnelle à la dérivée seconde de l'enveloppe<sup>63</sup>.

#### 2.4.4. Mesure du coefficient de non linéarité

Le coefficient de non linéarité du fluide peut se déduire de l'équation (2.7). Il apparaît sur la figure 2.14 que, pour un train d'ondes de fréquence centrale 10 MHz émis dans l'eau et dont la durée est  $\Theta = 1\mu s$ , la distance optimale se situe autour de 20 mm. A cette distance, l'amplitude du déplacement de basse fréquence est importante, sans pour autant que la croissance linéaire de la relation (2.7) soit mise en défaut. Afin d'obtenir le coefficient de non linéarité, l'amplitude  $U_0$ , émise à la source, est mesurée au préalable. Le déplacement auto-démodulé est ensuite mesuré pour différentes amplitudes d'émission  $U_0$ . Deux séries de mesures ont été effectuées dans l'eau et dans l'éthanol. La superposition des déplacements ( $U$  et  $U_{BF}$ ) est représentée sur la figure 2.16. Etant donné que la célérité de l'éthanol est inférieure à celle de l'eau et que son coefficient de non linéarité est plus important<sup>2</sup>, l'amplitude du déplacement auto-démodulé est plus importante. En conséquence, le déplacement total  $U$  de la figure 2.16.b est fortement déformé. Notons que les amplitudes à la source diffèrent légèrement ( $U_0 = 6,8$  nm pour l'eau,  $U_0 = 7,4$  nm pour l'éthanol). Cette différence est liée aux variations du coefficient de transmission à l'interface transducteur/liquide (l'impédance caractéristique de l'éthanol est plus faible que celle de l'eau : 924 kRayl.).

	$\varepsilon$	$L_C$	$L_{BF}$	$L_{HF}$
Eau	$2.8 \cdot 10^{-4}$	23.9 mm	26 mm	520 mm
Ethanol	$3.9 \cdot 10^{-4}$	7.8 mm	33 mm	665 mm

Tableau 2.1 : Distances caractéristiques dans l'eau et dans l'éthanol calculées à partir des données expérimentales

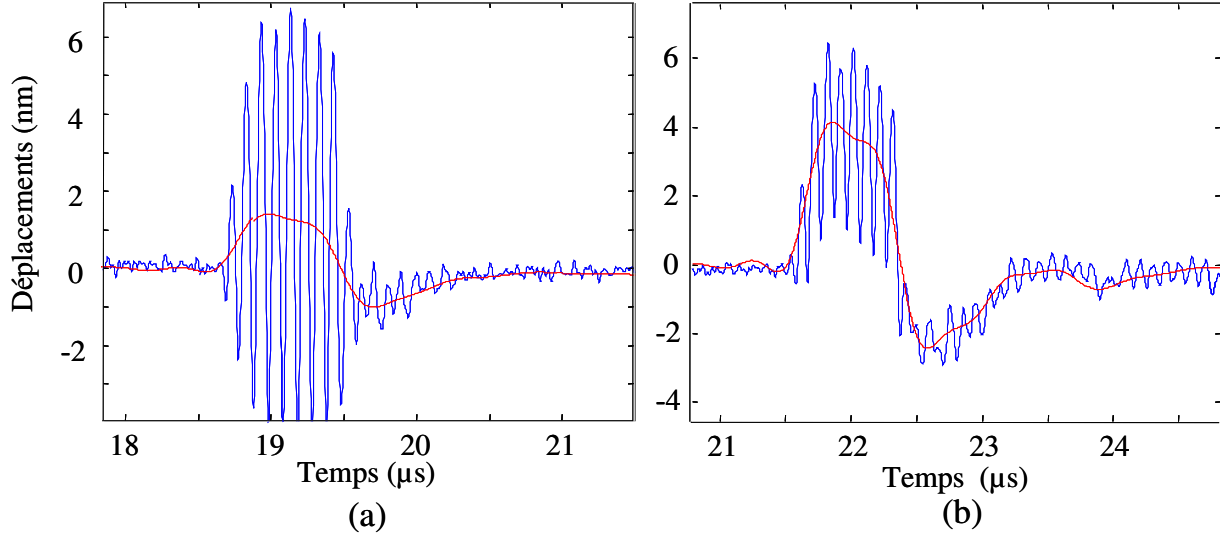


Figure 2.16 : Superposition des déplacements  $U$  et  $U_{BF}$  à la distance  $z = 15,7$  mm. (a) Cas de l'eau. (b) Cas de l'éthanol.

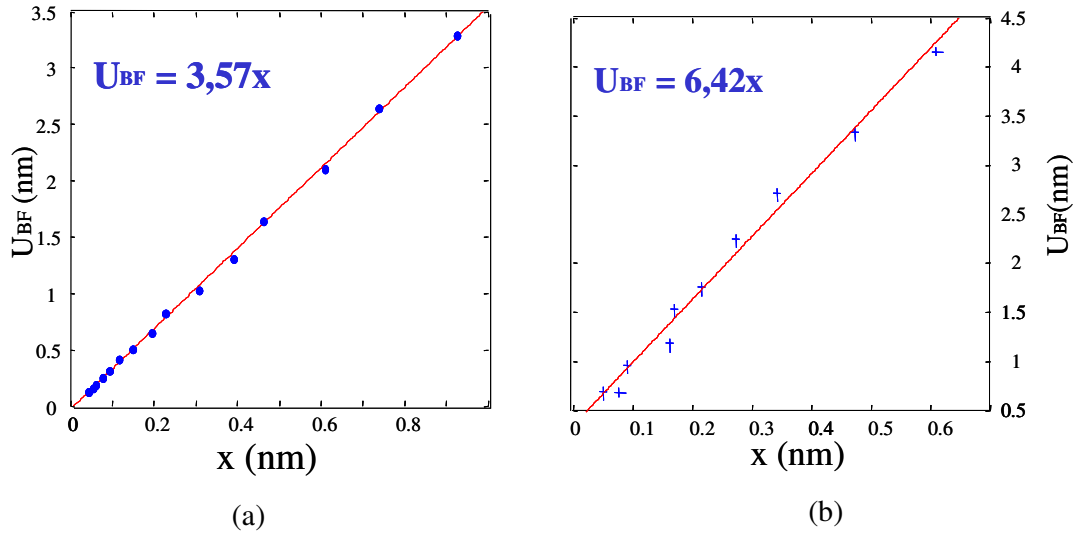


Figure 2.17 : Mesure du coefficient de non linéarité  $\beta$  de l'eau (a) et de l'éthanol (b). Les croix et les points représentent les mesures. Les droites sont obtenues par régression linéaire. La pente donne la valeur du coefficient de non linéarité.

Dans l'éthanol, le régime d'auto-démodulation diffère légèrement. L'atténuation peut, pour des distances relativement faibles, diminuer assez fortement l'amplitude de la composante primaire, sans que la diffraction de la composante de basse fréquence soit complète (cf. tableau 2.1). Compte tenu de ces remarques, les mesures de coefficient de non linéarité sont effectuées à  $z = 20$  mm l'eau et à  $z = 15$  mm dans l'éthanol.

Les variations de l'amplitude du déplacement auto-démodulé en fonction de la quantité  $x = zk^2U_0^2 / 4$  (homogène à une longueur) sont représentées sur la figure 2.17. La dépendance linéaire est très nette et confirme le comportement quadratique de  $U_{BF}$  en fonction de l'amplitude de la source  $U_0$ . D'après l'équation (2.7), la pente de la droite, obtenue par régression linéaire au sens des moindres carrés, est égale au coefficient de non linéarité  $\beta$ . Les valeurs obtenues pour l'eau ( $\beta = 3,57$ ) et l'éthanol ( $\beta = 6,42$ ) sont en bon accord avec celles disponibles dans la littérature<sup>89</sup>. Ainsi, le signal auto-démodulé constitue une alternative aux méthodes classiques de mesure de  $\beta$ <sup>89,90,91,21</sup>. Si l'atténuation à la fréquence de l'onde primaire n'est pas trop importante et que la diffraction de l'onde primaire est négligeable, l'amplitude  $U_0$  peut être mesurée à la distance à laquelle est mesuré le déplacement auto-démodulé sans introduire trop d'erreur sur l'estimation du paramètre  $\beta$ . Dans le cas où l'atténuation n'est pas négligeable, il est possible de la prendre en compte (ce qui est généralement fait pour les mesures exploitant la seconde harmonique). Lors d'une brève étude numérique présentée en annexe (cf. Annexe A), nous revenons sur l'intérêt d'utiliser un filtrage passe-bas pour mesurer le coefficient de non linéarité à l'aide de l'auto-démodulation.

#### 2.4.5. Mesures dans l'huile de tournesol

Afin de tester les limites de cette méthode de mesure de coefficient de non linéarité, nous avons effectué des mesures dans de l'huile de tournesol, liquide très atténuant. Pour l'estimation du coefficient de non linéarité de l'huile, nous faisons l'hypothèse que la composante auto-démodulée n'est pas atténuée.

Le logarithme népérien de l'amplitude du déplacement  $U$  mesurée en fonction de la distance séparant le transducteur de la membrane est représenté sur la figure 2.18. Le coefficient directeur de la droite permet d'estimer le coefficient d'atténuation.

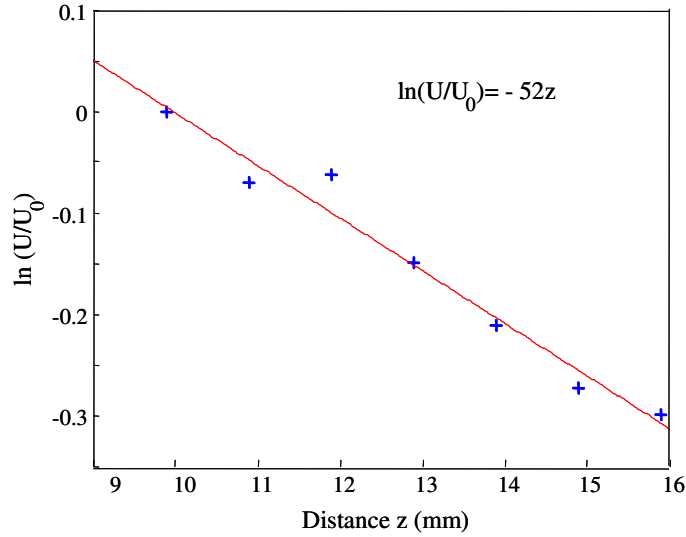


Figure 2.18 : Mesure du coefficient d'atténuation d'une huile de Tournesol à  $f_0 = 10$  MHz.

Le résultat obtenu ( $52 \text{ Np.m}^{-1}$ ) est presque identique à celui trouvé dans la littérature<sup>92</sup> ( $\alpha_{h.\text{tournesol}}(f = 10\text{MHz}) = 49 \text{ Np.m}^{-1}$ ).

A la fréquence de travail, la longueur d'atténuation  $L_\alpha = 19 \text{ mm}$  est légèrement plus courte que la distance caractéristique de diffraction de la composante de basse fréquence  $L_{BF} = 27 \text{ mm}$ . La composante à 10 MHz subit donc une atténuation non négligeable avant que la diffraction n'ait totalement affectée la forme du déplacement auto-démodulé (figure 2.19.a).

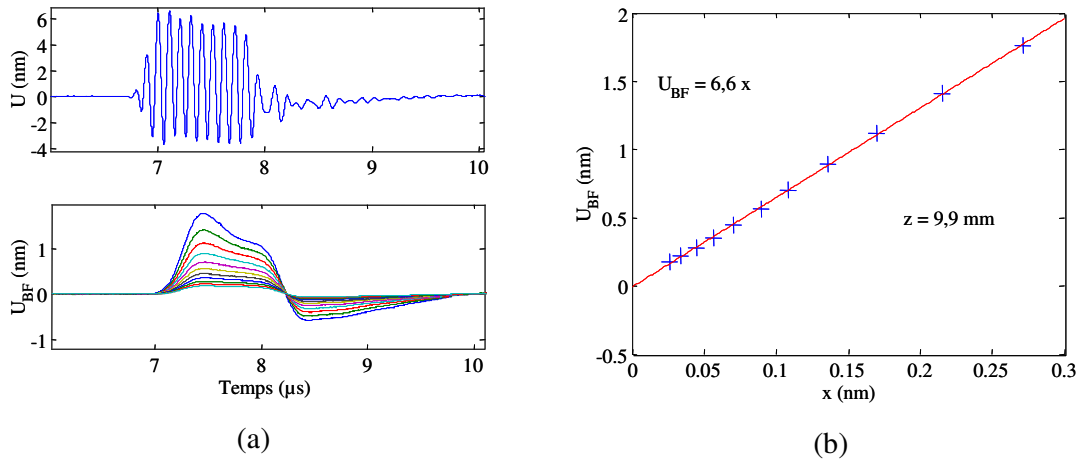


Figure 2.19 : (a) Représentation temporelle, pour  $z = 9,9 \text{ mm}$ , du déplacement total  $U$  et de sa composante auto-démodulée dans l'huile tournesol. (b) Mesure du coefficient de non linéarité de l'huile de tournesol.

Le coefficient de non linéarité de l'huile de tournesol est trouvé égal à  $\beta = 6,6$  (cf. figure 2.19.b). A notre connaissance il n'existe pas de valeurs reportées dans la littérature.



## 2. 5. Etude numérique de la diffraction

Expérimentalement, l'utilisation de train d'ondes de durée relativement courte a permis l'analyse des résultats en champ proche à l'aide d'un modèle en ondes planes. A plus grande distance, l'hypothèse d'onde plane n'est plus valable. Averkiou *et al* ont montré que l'équation KZK permet d'étudier numériquement le processus d'auto-démodulation non linéaire affectant le signal de pression<sup>70</sup>.

Dans cette partie, cette équation est utilisée afin d'étudier le processus de diffraction de la composante auto-démodulée du déplacement. Nous utilisons un code numérique 2D basé sur la discrétisation de l'équation KZK (Khokhlov, Zaboloskaya et Kuznetsov), écrite pour le potentiel acoustique  $\phi$ . Ce code numérique a été développé par R. Marchiano et F. Coulouvrat<sup>93,94</sup> (Institut Jean Le Rond D'Alembert, Université Pierre et Marie Curie).

### 2.5.1. Code KZK en potentiel

Le potentiel est relié à la pression à l'aide de la relation (1.21). En négligeant la densité lagrangienne d'énergie, cette relation devient :

$$p \cong \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (2.12)$$

L'équation KZK s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \tau} = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} \phi + \frac{b}{2c_0^3} \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} + \frac{\beta}{2c_0^3} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2. \quad (2.13)$$

Les deux premiers termes du membre de droite modélisent respectivement les effets de la diffraction ( $\Delta_{\perp}$  est l'opérateur désignant le Laplacien dans un plan perpendiculaire à l'axe  $z$ ) et les effets thermovisqueux. Le dernier terme modélise l'action de la non linéarité.

L'équation est discrétisée à deux dimension  $(z, x)$ , où  $z$  repère la distance sur l'axe de propagation et  $x$  sur l'axe perpendiculaire. A cette fin, on introduit les variables sans dimension suivantes :

le potentiel  $\Phi = \frac{c_0 \epsilon}{k} \phi$  et le temps retardé  $\tau' = \omega \tau$ . La variable spatiale axiale est

adimensionnée par la distance de choc  $Z = \frac{z}{L_c}$ . La distance  $x$  est adimensionnée par la taille

caractéristique de la source :  $X = \frac{x}{r_0}$ .

En utilisant ces variables, l'équation KZK à deux dimensions prend la forme suivante :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Z \partial \tau'} = \frac{kr_0 L_c}{4L_d} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{L_c}{L_a} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \tau'^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau'} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \tau'} \right)^2, \quad (2.14)$$

En introduisant le nombre de Gol'dberg  $\Gamma$  (équation 1.32) et le nombre de Khokhlov  $\kappa$  (équation 1.45), l'équation s'écrit finalement :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Z \partial \tau'} = \frac{kr_0}{4} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \tau'^3} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau'} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \tau'} \right)^2. \quad (2.15)$$

Ce code modélise la formation et la propagation d'une onde de choc. Lorsque la variable considérée est la pression, le choc se traduit par une discontinuité de première espèce (cf. 1.1.2.1), qui n'est pas simple à manipuler numériquement. La détermination de la position du choc peut de plus être coûteuse en temps de calcul. Décrit à l'aide du potentiel acoustique, sa formation donne lieu à un point anguleux, plus facile à traiter numériquement. De plus la forme d'onde en potentiel correspondant à l'onde de choc est simplement la valeur maximale du potentiel en chaque point où celui-ci est à valeurs multiples<sup>95</sup>. Ce code numérique a été utilisé pour étudier l'interaction d'une onde de choc avec une caustique<sup>93,94</sup>, ou la diffraction en régime non linéaire<sup>95</sup>. Plus récemment, il a été adapté à l'étude de la propagation non linéaire en milieu hétérogènes<sup>96</sup>.

L'équation écrite en potentiel est bien adaptée à l'analyse du déplacement auto-démodulé car elle permet de comparer directement les simulations à nos résultats expérimentaux, le potentiel acoustique étant proportionnel au déplacement (eulérien) :

$$U \cong \frac{\Phi}{c_0}. \quad (2.16)$$

Cette approximation est justifiée si les effets cumulatifs sont prépondérants devant les effets locaux. L'équation KZK est établie en considérant une description eulerienne, mais nous avons vu au premier chapitre que la différence entre une quantité eulerienne et lagrangienne n'est pas cumulative et devient assez rapidement négligeable si la propagation est non linéaire.

La souplesse de cet outil numérique permet de s'affranchir des effets de la diffraction, de l'atténuation ou de la non linéarité, afin de clairement identifier le rôle imputable à chacun dans l'évolution de la forme d'onde observée.

La résolution numérique de l'équation KZK est basée sur un découplage des effets de la diffraction, de l'atténuation et de la non linéarité, lorsque la distance  $\delta Z$ , séparant deux plans

sur lesquels le champ est calculé, est petite devant la longueur d'onde de la source (dans un milieu homogène)<sup>xxvi</sup>. Elle est appelée « méthode à pas fractionnés »<sup>97</sup>. Supposons que le potentiel  $\phi$  soit connu dans un plan situé à une distance  $Z$  de la source (ou dans le plan des sources). Pour calculer  $\phi$  dans un plan situé à la distance  $Z + \delta Z$ , l'équation KZK est scindée en deux équations. L'une linéaire, permet de calculer le potentiel à la position  $Z + \delta Z$  en tenant compte des effets de diffraction :

$$\frac{\partial^2 \Phi_D(Z, X, \tau')}{\partial Z \partial \tau'} = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} \Phi_D(Z, X, \tau'). \quad (2.17)$$

En passant dans le domaine de Fourier, l'atténuation affectant différemment chacune des composantes fréquentielles est implémentée en multipliant par l'opérateur :

$$T_F(\Phi_{D,\alpha})(Z + \delta Z, X, \omega) = T_F(\Phi_D) e^{-\alpha(\omega)\delta Z}, \quad (2.18)$$

où  $\alpha$  est le coefficient d'atténuation.

Une fois cette solution établie, les effets non linéaires sont pris en compte par la résolution de l'équation de Burgers pour le même pas  $\delta Z$  :

$$\frac{\partial \Phi_{D,\alpha}}{\partial Z \partial \tau'} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau'} \left( \frac{\partial \Phi_{D,\alpha}}{\partial \tau'} \right)^2. \quad (2.19)$$

Le champ est ainsi calculé de proche en proche. Le couplage des différents effets est assuré par l'itération du procédé.

### 2.5.2 Simulation numérique des résultats expérimentaux

Les paramètres d'entrée pour simuler des expériences réalisées dans l'eau sont résumés dans le tableau 2.2. La source est une ligne de largeur  $d = 10$  mm, rendant compte du diamètre du transducteur. L'amplitude du déplacement  $U_0$  de la source est supposée uniforme (mode piston). La distance de choc vaut  $L_c = 24$  mm.

Milieu de propagation	Source	Maillage
$c_0 = 1500$ m/s $\alpha(f) = 23 \cdot 10^{-15} f^2$ Np/m $\beta = 3,5$	$f_0 = 10$ MHz durée $\Theta = 1$ $\mu$ s $U_0 = 6,8$ mm Largeur $d = 10$ mm	$f_{\text{ech}} = 512$ MHz $\Delta x = 0,2$ mm $\Delta z = 30$ $\mu$ m
Tableau 2.2 Récapitulatif des paramètres d'entrée utilisés pour la comparaison simulation/expérience.		

<sup>xxvi</sup> Pour plus de détails, voir la référence 93.

La durée  $\Theta$  du train d'ondes est dans un premier temps fixée à  $1 \mu s$ . La fréquence d'échantillonnage a été choisie égale à 512 MHz. Elle satisfait le critère de Shannon de bon échantillonnage d'un signal ( $f_{max} < f_{ech}/2$ ) pour les harmoniques générées au cours de la propagation, tout en conduisant à une dimension raisonnable de la matrice des signaux. Le pas spatial  $\Delta z$  selon l'axe de propagation est égal au cinquième de la longueur d'onde ( $\lambda_{10 MHz} = 150 \mu m$ ). Le pas  $\Delta x$  selon l'axe  $x$  est 0,2 mm. Pour comparer les résultats de la simulation numérique aux résultats expérimentaux du paragraphe 2.4, nous avons mesuré le déplacement émis par le transducteur pour une distance le séparant de la membrane inférieure à  $500 \mu m$ . Afin d'éliminer la composante auto-démodulée créée sur cette distance, le signal est filtré passe-haut numériquement (fréquence de coupure  $f_c = 5$  MHz). Le signal représentant le potentiel émis par la source est tracé, avec son spectre, sur la figure 2.20.

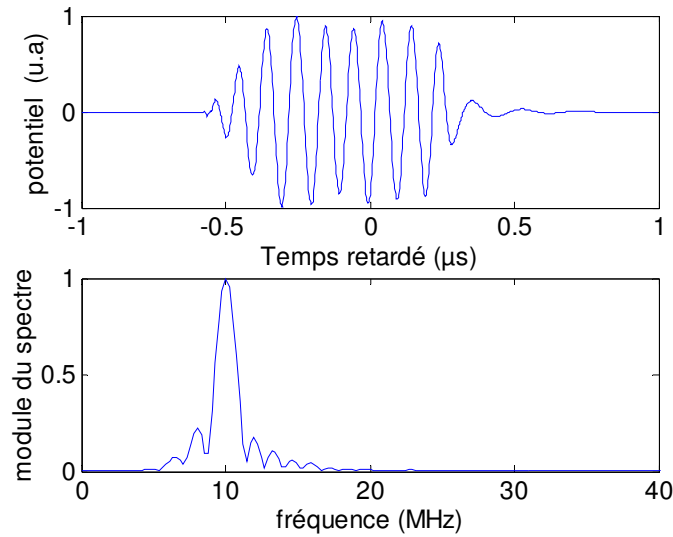


Figure 2.20 : Signal utilisé comme signal source lors de la simulation numérique. Il s'agit du déplacement mesuré à une distance  $z < 500 \mu m$ , puis filtré passe-haut.

De la même façon que nous isolons la composante auto-démodulée du déplacement expérimental, le signal du potentiel est filtré à l'aide d'un filtre passe-bas numérique. Différents filtres ont été testés ; nous avons finalement opté pour un filtre de type Butterworth d'ordre 7 et de fréquence de coupure  $f_c = 2,5$  MHz, le plus proche de celui utilisé lors des expériences.

Sur la figure 2.21, les déplacements obtenus expérimentalement sont comparés à ceux fournis par la simulation. La forme du déplacement auto-démodulé est bien retrouvée. L'amplitude obtenue numériquement est par contre légèrement inférieure à celle observée

expérimentalement (de 17 % pour  $z = 3$  mm). Le rapport  $R$  introduit au premier chapitre (équation 1.60). vaut, pour une distance de 3 mm (soit 20 longueurs d'onde),  $R \approx 200^{\text{xxvii}}$ . La différence entre le déplacement lagrangien et eulerien, de l'ordre de 1 pm, est bien négligeable à cette distance. De plus, la différence entre le déplacement en coordonnées lagrangiennes et son équivalent en coordonnées euleriennes est un terme non linéaire, non cumulatif, oscillant à la fréquence  $2f_0$ . Le filtrage passe-bas permet donc de l'éliminer de la composante auto-démodulée. Cette différence ne permet donc pas d'expliquer la différence d'amplitude. Pour l'interpréter, trois hypothèses peuvent être avancées. La première est l'utilisation d'un modèle bidimensionnel en coordonnées cartésiennes, qui ne tient pas compte de la symétrie cylindrique de la configuration expérimentale. La deuxième est la forme de la source injectée comme donnée d'entrée du code. Nous avons en effet supposé que la source était un piston parfait. Or le transducteur utilisé est de type piezo-composite : la surface émettrice est formée de petits éléments noyés dans une résine. La source n'est donc pas rigoureusement assimilable à un piston. La troisième est la mise en défaut de la validité de l'équation KZ. Cette équation n'est valable que dans le cadre de l'approximation paraxiale. Il est d'usage de considérer cette approximation comme valide tant que l'angle que fait le faisceau avec l'axe de propagation reste inférieur à 15 degrés. Si cette approximation est vérifiée à la distance  $z = 22$  mm, à la distance de 3mm, l'angle est égal à  $19^\circ$ . Cette hypothèse expliquerait que la différence d'amplitude tend à se réduire lorsque la distance augmente.

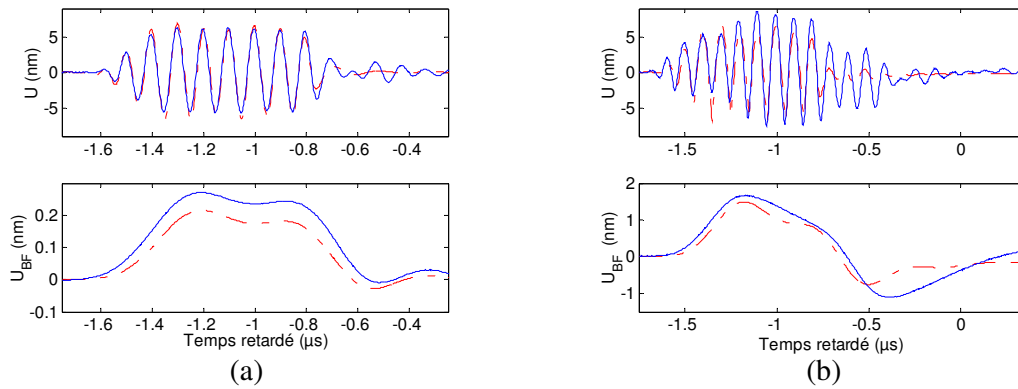


Figure 2.21 : Superposition des déplacements mesurés (en traits pleins bleus) et simulés numériquement (en pointillés rouges). (a)  $z = 3$  mm. (b)  $z = 22$  mm

---

<sup>xxvii</sup>  $R = \frac{1}{2} k_0 \beta z$ .

L'évolution en fonction de la distance de l'amplitude du déplacement auto-démodulé simulée numériquement est comparée aux résultats expérimentaux (figure 2.22). La première est légèrement inférieure à la seconde, mais les résultats sont en très bon accord.

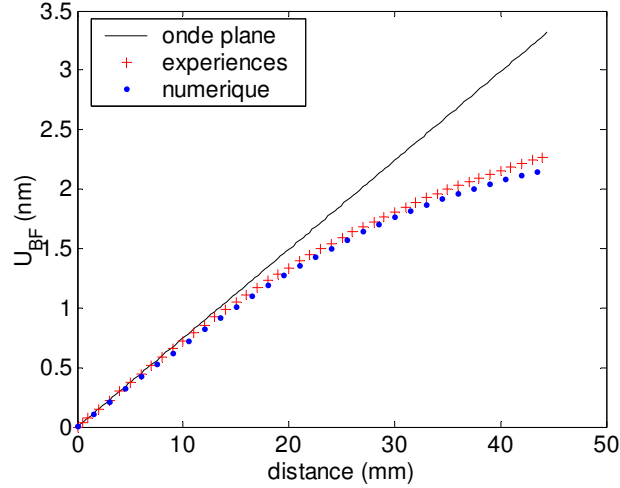


Figure 2.22 : Evolution de l'amplitude du déplacement auto-démodulé en fonction de la distance. Le trait noir représente le cas du modèle en ondes planes. Les croix rouges représentent les résultats expérimentaux et les points bleus les résultats de la simulation numériques.

La simulation numérique reproduit bien les résultats expérimentaux. Elle est donc adaptée à l'étude de l'auto-démodulation non linéaire. Nous utilisons par la suite cet outil numérique pour étudier les différents mécanismes mis en jeu dans la limitation de l'amplitude du déplacement de basse fréquence.

### 2.5.3. Simulation d'ondes planes

Les résultats d'une simulation réalisée sans effets de diffraction (équation de Burgers dissipative) sont représentés sur la figure 2.23. La durée du train d'ondes est ici  $\Theta = 2 \mu s$ . Comme le prévoit le modèle d'ondes planes, le déplacement auto-démodulé conserve, en l'absence de diffraction, son allure rectangulaire. L'amplitude du déplacement auto-démodulé croît alors jusqu'à une valeur comparable à celle du déplacement de la source (figure 2.24 (b)), déformant l'allure du déplacement total.

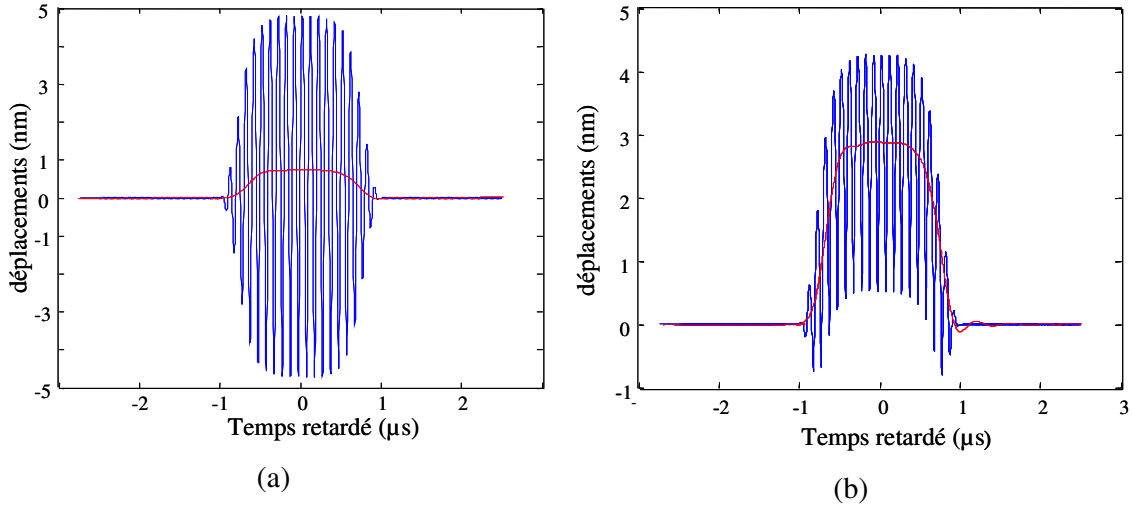


Figure 2.23 : Superposition du déplacement total  $U$  (en bleu) et de sa composante auto-démodulée  $U_{BF}$  (en rouge) obtenus par la simulation de la propagation non linéaire d'un train d'ondes de durée  $\Theta = 2\mu s$ , avec atténuation et sans effets de diffraction. (a)  $z = 10$  mm. (b)  $z = 14$  mm.

Ceci confirme le rôle de la diffraction dans l'évolution de la forme du déplacement auto-démodulé.

#### 2.5.4. Rôle de l'atténuation

Afin de juger de l'importance de l'atténuation dans l'évolution de l'amplitude du déplacement auto-démodulé en fonction de la distance, nous avons effectué deux simulations. La première, basée sur la discrétisation de l'équation KZ, ne prend en compte que les effets de la diffraction et de la non linéarité. La seconde, basée sur une discrétisation de l'équation KZK, met en jeu les trois phénomènes.

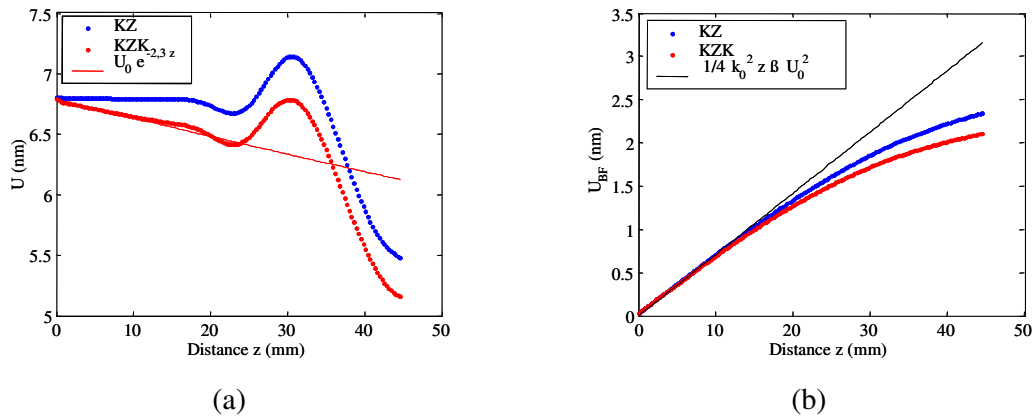


Figure 2.24 : Evolution de l'amplitude des déplacements  $U$  (2.24.(a)) et  $U_{BF}$  (2.24 (b)) simulés numériquement : en rouge sans atténuation (équation KZ) et en bleu avec atténuation (équation KZK). En trait plein est représentée l'amplitude dans le cas d'une onde plane atténuée.

Les amplitudes du déplacement total  $U$  (figure 2.24.a) et de sa composante auto-démodulée  $U_{BF}$  (figure 2.24.b) sont représentées sur la figure 2.24 en fonction de la distance  $z$ . En bleu figurent les simulations numériques faites sans atténuation (KZ), et en rouge avec atténuation (KZK). A titre de comparaison, les amplitudes des déplacements dans le cas d'une onde plane atténuée sont superposées sur la figure 2.24.a. Sur la figure 2.24.b, nous avons superposé le déplacement auto-démodulé obtenu pour une onde plane se propageant dans un fluide parfait (trait plein noir).

L'amplitude du déplacement total en l'absence d'absorption reste constante jusqu'à une distance de l'ordre de 20 mm. A partir de cette distance, l'amplitude oscille (du fait de la diffraction ici traitée à deux dimensions) avant de décroître assez rapidement. Cette distance est proche de la distance de choc ( $L_c = 24$  mm). Au-delà de cette distance le régime d'extra atténuation est atteint. Sur la figure 2.24.a., la courbe donnant l'évolution de l'amplitude d'une onde plane atténuée (cas du paragraphe 2.5.3) suit la simulation KZK jusqu'à la distance de choc<sup>xxviii</sup>.. Le rôle de l'atténuation dans la limitation du processus de création de la composante auto-démodulée est identifiable sur la figure 2.24.b., diffraction et atténuation rentrent en ligne de compte, bien que l'influence de cette dernière soit moindre. Au delà de la distance de choc, l'extra atténuation diminue l'énergie disponible pour la création du déplacement auto-démodulé.

A l'aide de l'approximation quasi-linéaire, une expression analytique de l'amplitude du déplacement auto-démodulé sur l'axe de propagation peut être obtenue à partir de l'équation KZK<sup>98, 73</sup>. En négligeant l'atténuation et la diffraction de l'onde primaire (hypothèse en accord avec la situation expérimentale puisque  $L_{HF} = 52$  cm), il vient :

$$U_{BF}(z) = \frac{1}{4} \beta k_0^2 U_0^2 L_{BF} \tan^{-1} \left( \frac{z}{L_{BF}} \right), \quad (2.20)$$

où  $L_{BF}$  est la distance caractéristique de la diffraction de la composante auto-démodulée. Lorsque l'argument de la tangente inverse est petit, l'expression (2.7) de l'amplitude du déplacement  $U_{BF}$  obtenue dans le cadre d'un modèle d'onde plane est retrouvée. En comparant la variation d'amplitude avec la distance obtenue numériquement avec celle donnée par l'expression (2.20), la contribution de l'extra atténuation est identifiée. Celle-ci affecte l'amplitude du déplacement auto-démodulé pour des distances supérieures à 30 mm (cf. figure 2.25).

<sup>xxviii</sup> Nous n'avons pas observé expérimentalement la formation d'une onde de choc car le dispositif expérimental ne le permettait pas. Le filtrage passe-bas de fréquence de coupure égale à 50 MHz ne laisse passer que quatre harmoniques de la fréquence initiale.



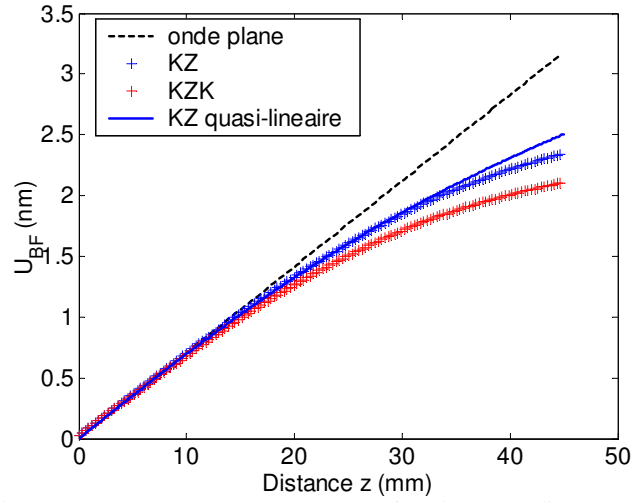


Figure 2.25 : Evolution du déplacement auto-démodulé en fonction de la distance. Comparaison du modèle d'ondes planes (en pointillés noir), de la simulation KZ (croix bleues), de la simulation KZK (croix rouges), et du modèle analytique sans atténuation (en trait plein bleu).

### 2.5.5. Effet de la durée du train d'ondes

Des simulations ont été menées pour différentes durées du train d'ondes, la largeur de la source étant maintenue constante ( $d = 10$  mm). L'évolution de l'amplitude de la composante auto-démodulée sur l'axe de propagation  $z$ , pour différentes durées  $\Theta$  (de 1 à 3,5  $\mu$ s), est représentée sur la figure 2.26.a. Le domaine linéaire de l'effet cumulatif est limité à des distances d'autant plus courtes que la durée du train d'ondes est longue.

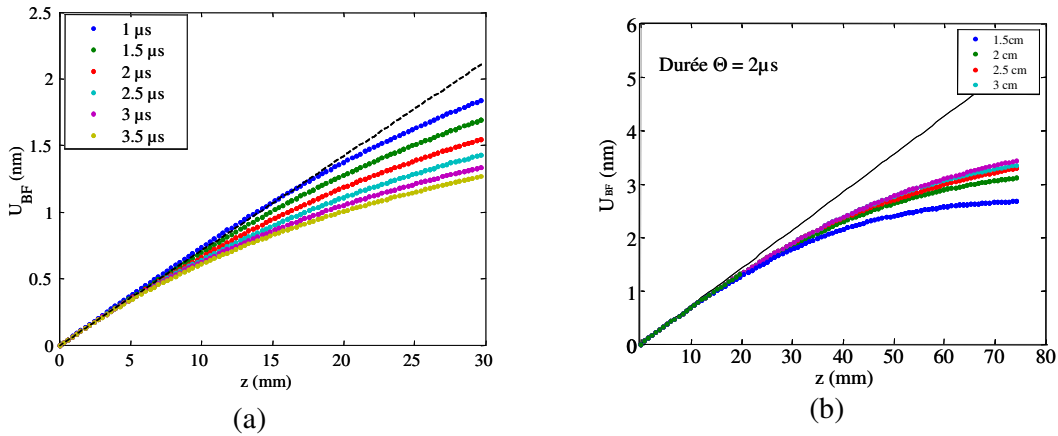


Figure 2.26 : (a) Variations de l'amplitude du déplacement  $U_{BF}$  en fonction de la distance de propagation  $z$  (pour différentes durées  $\Theta$  du train d'ondes). (b) Variations de l'amplitude du déplacement  $U_{BF}$  en fonction de la distance de propagation  $z$  pour différentes tailles  $d/2$  de la source.

Nous avons reporté sur la figure 2.26.b le cas de sources de différentes tailles émettant un train d'ondes de même durée ( $\Theta = 2 \mu$ s). Nous retrouvons ici un résultat prévisible : plus la

source est étendue, plus la composante auto-démodulée du faisceau reste collimatée sur de grandes distances.

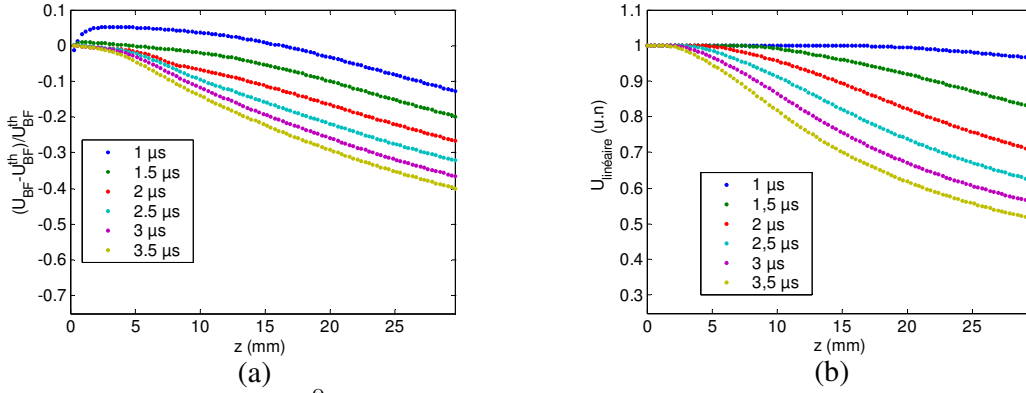


Figure 2.27 : (a) Ecart relatif  $\delta^0(z)$  au modèle d'ondes plane de l'amplitude du déplacement auto-démodulé simulé numériquement pour différentes durées du train d'ondes, en fonction de la distance.

(b) Amplitude normalisée du déplacement associé à la propagation linéaire d'une onde en forme de rectangle (mêmes durées).

Pour une durée du train d'ondes  $\Theta$  fixée, l'écart relatif de l'amplitude du déplacement auto-démodulé simulé numériquement par rapport au modèle d'ondes plane s'écrit :

$$\delta^0(z) = \frac{U_{BF}(z) - U_{BF}^{plane}(z)}{U_{BF}^{plane}(z)}. \quad (2.21)$$

Sur la figure 2.27.a, cet écart relatif est tracé pour différentes durées  $\Theta$  du train d'ondes. Pour  $\Theta = 1 \mu$ s, il est positif pour de faibles distances, ce qui n'est pas observé pour des trains d'ondes plus long. Cette différence semble provenir de la forme d'onde à la source : les trains d'ondes de durée  $\Theta > 1 \mu$ s ne correspondent pas à des signaux expérimentaux. Ils ont été synthétisés numériquement : la forme du train d'ondes est donc plus régulière.

Pour  $\Theta = 1 \mu$ s, on constate que l'écart reste inférieur à 10 % jusqu'à une distance  $z = 25$ mm. Ceci est en accord avec les résultats expérimentaux de la figure 2. 14. A titre de comparaison, nous avons simulé numériquement la propagation linéaire d'une onde ayant une forme rectangulaire, pour différentes durées  $\Theta$  de ce rectangle<sup>XXIX</sup>. Seuls les effets de diffraction modifient alors l'amplitude du déplacement au cours de sa propagation. Les variations d'amplitude en fonction de la distance sont représentées sur la figure 2.27.b. Ces variations sont à première vue assez similaires à celles observées sur la figure 2.27.a.

<sup>XXIX</sup> Compte-tenu de l'amplitude et de la fréquence du déplacement de basse fréquence et des distances de propagation considérés ici, il est raisonnable de considérer sa propagation comme linéaire.

Sur la figure 2.28, la variation de l'amplitude du déplacement de l'impulsion se propageant linéairement est superposée à la quantité  $U_{BF}(z)/U_{BF}^{plane}(z)=1+\delta^\Theta(z)$ , pour une durée  $\Theta = 3 \mu s$ . La similitude observée confirme le régime de diffraction quasi-linéaire du déplacement auto-démodulé. Néanmoins on constate que  $U_{BF}$  reste collimaté sur une distance plus grande du fait de son alimentation par les sources virtuelles non linéaires dans la direction de propagation qu'une onde de forme rectangulaire émise directement par la source.

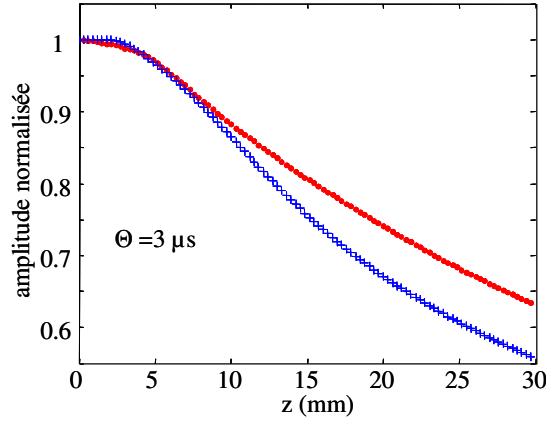


Figure 2.28 : Pour  $\Theta = 3 \mu s$ , superposition de la quantité  $(1 + \delta^\Theta(z))$ , en points rouges et de l'amplitude normalisée obtenue pour la propagation linéaire d'un rectangle de même durée, croix bleues.

### 2.5.6. Conclusion de l'étude numérique

Les simulations permettent de reproduire correctement les résultats expérimentaux. L'erreur introduite par le traitement de la diffraction à deux dimensions ne respectant pas tout à fait la géométrie de la source, visible sur la forme du déplacement auto-démodulé en champ lointain, ne semble pas avoir de conséquence drastique sur l'amplitude de celui-ci. Le code est en cours de modification pour traiter le cas à deux dimensions, d'une source axisymétrique.

Il apparaît que l'atténuation du train d'ondes contribue à la limitation de la création de la composante auto-démodulée, mais l'effet dominant reste la diffraction de l'onde de basse fréquence.

Nous avons donc étudié plus en détail le régime de diffraction de la composante auto-démodulée. Il apparaît que le régime de diffraction est « quasi-linéaire ». Tout se passe comme si le déplacement de basse fréquence, une fois créé, se propage linéairement en étant diffracté. Néanmoins, le processus cumulatif qui permet sa génération tend à le maintenir collimaté sur une plus grande distance que s'il était émis directement par la source. Les effets de diffraction se manifestent d'autant plus rapidement que la durée du train d'ondes est longue.

Considérons un train d'ondes d'une durée telle que celles utilisées lors des mesures de puissance à l'aide d'une balance acoustique (i.e. d'une durée minimale de l'ordre de la centaine de  $\mu\text{s}$ <sup>60</sup>). Pour un transducteur plan de rayon 5 mm, la distance de Rayleigh de la composante auto-démodulée  $L_{BF}$  est alors de l'ordre quelques centaines de microns. En raison des effets de diffraction, la composante quasi-statique du déplacement auto-démodulé a donc disparu aux distances de fonctionnement des balances acoustiques (la distance qui sépare le transducteur de la cible est en général de 5 à 10 cm). Par ailleurs, ces expériences de calibration, généralement dédiées à l'hyperthermie, ont pour objectif la caractérisation de transducteurs focalisés, dont les dimensions sont plus importantes. Comme nous avons mis en évidence expérimentalement qu'au point focal, le déplacement auto-démodulé tend vers deux impulsions brèves (cf. figure 2.11), le déplacement auto-démodulé ne contient donc pas de composante quasi-statique.

Enfin, si l'on fait tendre la durée du train d'ondes vers l'infini, la longueur de diffraction  $L_{BF}$  tend vers zéro. En particulier, il n'y a alors pas de composante statique du déplacement dans le cas d'une onde harmonique non plane.

Ces considérations sont reprises dans ce qui suit, où nous nous intéressons à la pression associée au déplacement auto-démodulé.

## 2.6. Pression auto-démodulée

Calculons la pression associée au déplacement auto-démodulé. Sous l'hypothèse quasi-linéaire (avec les notations de la partie 2.2.2), la pression du second ordre en  $\varepsilon$  est (expression (1.99)) :

$$p_2(a, \tau) = -A(\partial U_2 / \partial a) + \beta A(\partial U_1 / \partial a)^2. \quad (2.22)$$

Seule la composante de la pression qui nous intéresse est la composante de basse fréquence. En conséquence, l'équation (2.7) est utilisée pour exprimer le déplacement au second ordre  $U_2$ . La composante de basse fréquence de la pression est alors :

$$p_{BF}(a = z, \tau) = \frac{A\beta k_0^2}{4} \left( \frac{z}{c_0} \frac{\partial U_0^2(\tau)}{\partial \tau} + U_0^2(\tau) \right). \quad (2.23)$$

La pression auto-démodulée  $p_{BF}$  possède deux contributions. L'une est cumulative, proportionnelle à la distance de propagation  $z$ . La seconde n'est pas cumulative. Là encore,

sous l'hypothèse de faible non linéarité, il est toujours possible d'appliquer le principe de superposition pour les ondes induites par la propagation non linéaire. Ces deux contributions se somment pour former la pression auto-démodulée.

### 2.6.1. Contribution cumulative

Dans le cas d'une onde plane, les termes locaux de l'équation de propagation faisant intervenir la densité Lagrangienne d'énergie s'annulent<sup>24, 25</sup>. Ainsi, la contribution cumulative à la pression auto-démodulée peut être calculée à partir de l'expression du déplacement de basse fréquence, en utilisant la relation:

$$p_{BF}^C(z, \tau) = \rho_0 c_0 (\partial U_{BF} / \partial \tau). \quad (2.24)$$

Cette contribution résulte de la combinaison des fréquences différences résultant de l'interaction entre les différentes composantes spectrales formant le train d'ondes primaire. Cette pression a fait l'objet de nombreuses études, que l'on peut trouver dans la littérature. Des mesures ont été effectuées à l'aide d'hydrophones<sup>64, 69, 70</sup>.

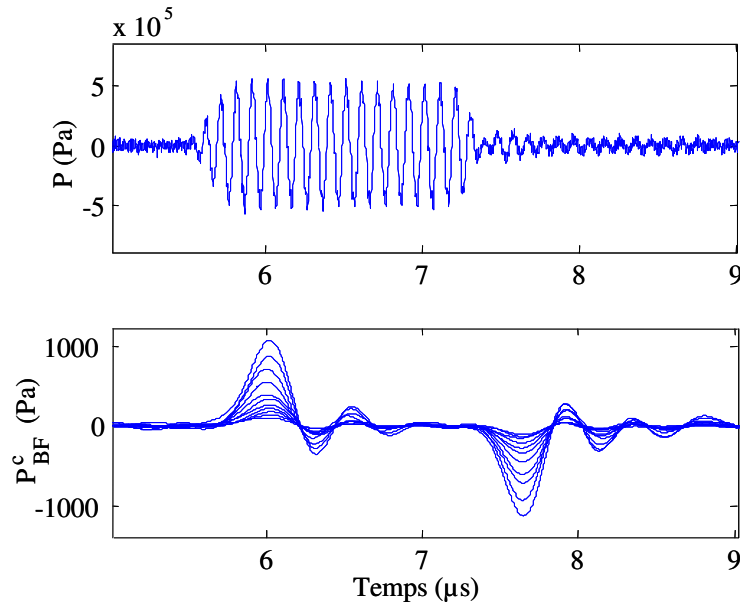


Figure 2.29 : Pressions déduites du déplacement mesuré expérimentalement par dérivation numérique pour  $z = 3 \text{ mm}$

Sur la figure 2.29 sont représentées la pression totale (obtenue par dérivation du déplacement total  $U$ ) et sa composante de basse fréquence (obtenue par une dérivation numérique du

déplacement auto-démodulé, en utilisant la relation 2.24<sup>xxx</sup>) pour une distance égale à  $z = 3$  mm.

On remarque que la composante de basse fréquence de la pression est, au filtrage près, nulle entre les transitoires du train d'ondes. Dans nos conditions expérimentales, l'amplitude est d'environ 1000 Pa.

Ces mêmes pressions sont représentées sur la figure 2.30 pour une distance de propagation égale à  $z = 22$  mm. L'amplitude de la pression auto-démodulée est alors plus importante, de l'ordre de 8000 Pa, soit huit fois la pression en  $z = 3$  mm, ce qui traduit bien le caractère cumulatif de cette pression. Par ailleurs la forme du signal tend vers la dérivée seconde de l'enveloppe du train d'ondes émis par la source.

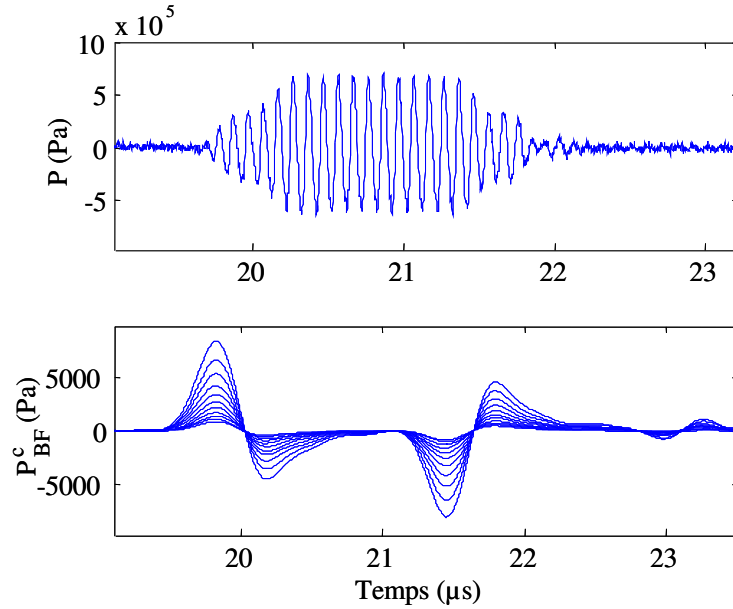


Figure 2.30 : "Pressions déduites par dérivation numérique du déplacement expérimental pour  $z = 22$  mm.

En tenant compte des effets de diffraction et de l'atténuation, Averkiou *et al* ont donné une expression analytique de cette pression de basse fréquence à partir de l'équation KZK<sup>9</sup>. En champ lointain, lorsque le train d'ondes est totalement atténué, le champ de pression auto-démodulé est, sur l'axe de propagation, inversement proportionnel à la distance  $z$ , et proportionnel à la dérivée seconde du carré de l'enveloppe  $U_0^2(\tau)$ . On voit ainsi que la contribution cumulative au champ de pression auto-démodulé obtenue dans le cas d'une onde

<sup>xxx</sup> La dérivation numérique augment l'amplitude du bruit (filtrage passe-haut). Afin de le réduire, le signal a de nouveau été filtré passe-bas (fréquence de coupure  $f_c = 2,5$  MHz).

plane (Eq. 2.24), est en accord avec ces résultats : si le train d'ondes est atténué, la dépendance linéaire avec distance  $z$  n'est plus valable, et la diffraction du champ de basse fréquence agit par le biais d'un opérateur de dérivation :  $\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial \tau}$ .

Si seule cette contribution est prise en compte pour l'analyse des résultats obtenus en champ proche, la pression auto-démodulée obtenue est nulle entre les parties transitoires correspondant au début et à la fin du train d'ondes (figures 2.29 et 2.30). Ceci paraît étonnant puisque la partie quasi-statique du déplacement du train d'ondes est, près de la source, elle aussi cumulative.

Cette composante quasi-statique du déplacement est à l'origine de la contribution non-cumulative et elle s'identifie à la pression de radiation de Rayleigh.

### 2.6.2. Contribution non cumulative : lien avec la pression de radiation de Rayleigh

Le déplacement de basse fréquence, mesuré à  $z = 3$  mm et le module de son spectre sont représentés sur la figure 2.32. La composante fréquentielle dominante est la composante continue. Il est donc justifié de considérer la partie constante du déplacement auto-démodulé comme quasi-statique. Cette terminologie est choisie pour la différencier du déplacement statique, créé dans le cas d'une onde harmonique, et du qualificatif « dynamique » employé par certains auteurs<sup>99</sup>, à propos de la force de radiation qui serait créée par une source bi-harmonique.

Afin d'interpréter la partie quasi-statique de la pression auto-démodulée introduite précédemment, nous allons dans ce qui suit considérer la composante quasi-statique de  $U_{BF}$  comme la valeur moyenne temporelle du déplacement total  $U(t)$ . Cette analyse n'est pas appliquée aux bords du train d'ondes. Nous la limitons aussi aux distances de propagation inférieures à la distance de diffraction de la composante de basse fréquence (distance de Rayleigh  $L_{BF}$ ), pour lesquelles une analyse en onde plane est valable.

Cette démarche étend l'analyse faite dans les fluides par Westervelt<sup>16</sup> (reprise par Cantrell dans les solides<sup>47</sup>) à la partie quasi-statique du train d'ondes. Ceci nous permet d'identifier la contribution non cumulative de la pression auto-démodulée à l'excès moyen de pression correspondant au régime permanent du train d'ondes :

$$p_{BF}^{nc} = \langle P^L - P_0 \rangle_{T_0} = \frac{1}{4} A \beta k^2 U_0^2. \quad (2.25)$$

Compte-tenu de l'expression au second ordre de l'énergie d'une onde plane, cette pression, quasi-statique et non cumulative, s'identifie formellement à la pression de radiation de Rayleigh dans le cas d'une paroi parfaitement absorbante donnée dans l'équation (1.66) :

$$p_{BF}^{nc} = \frac{\beta}{2} \langle E \rangle_{T_0}.$$

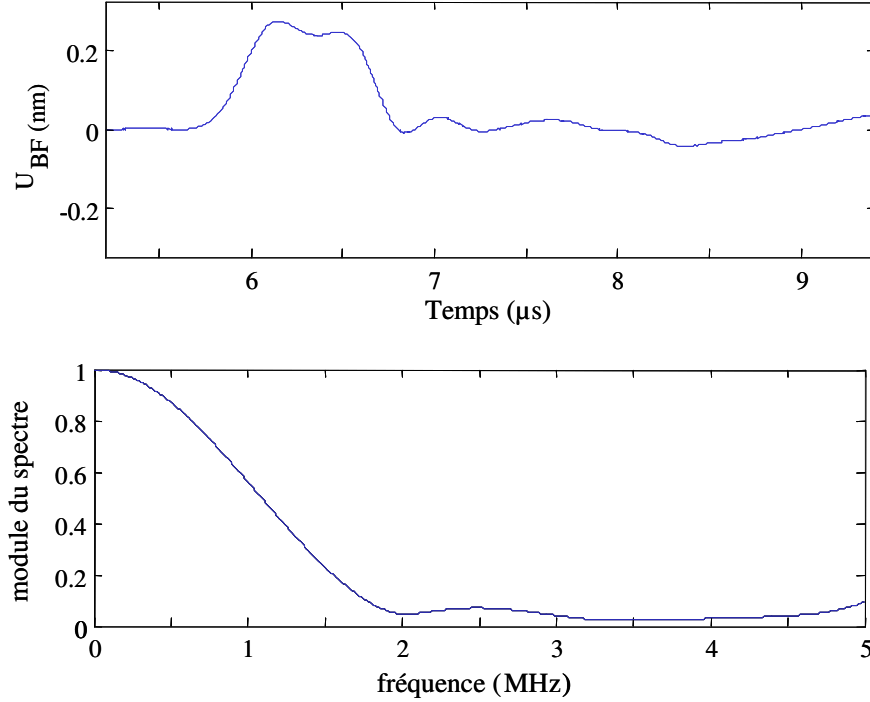


Figure 2.32 : Déplacement auto-démodulé (mesuré expérimentalement) pour une distance  $z = 3$  mm et module du spectre associé.

On retrouve ici l'idée que la pression de radiation de Rayleigh, non cumulative, est associée à la propagation non linéaire de l'onde, comme l'ont mis en évidence Westervelt dans les fluides<sup>16</sup> et Cantrell dans les solides<sup>47</sup>. Il existe un lien entre le déplacement statique cumulatif et cette pression non cumulative. Plus précisément les deux sont liés à l'existence d'une valeur moyenne non nulle, ne dépendant pas de la distance, du gradient de déplacement, appelée « acoustic straining »<sup>38</sup> ou « radiation strain »<sup>47</sup> qui s'écrit :

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial a} \right\rangle_{T_0} = \frac{1}{4} \beta k_0^2 U_0^2, \quad (2.26)$$



d'après les équations (1.97) et (1.98). En utilisant les relations (2.25) et (2.26), l'excès moyen de pression est relié à la valeur moyenne du déplacement par la relation :

$$p_{BF}^{nc} = A \left\langle \frac{\partial U}{\partial a} \right\rangle_{T_0} = A \langle U \rangle_{T_0} / z. \quad (2.27)$$

A la distance  $z = 22$  mm, la composante continue du module du spectre du déplacement auto-démodulé ne s'annule pas (figure 2.33.a). Néanmoins, à cette distance, son amplitude est plus faible que l'amplitude du déplacement auto-démodulé (inférieure à 50%). L'amplitude de la pression quasi-statique  $p_{BF}^{nc}$  (déduite de l'équation (2.27)) est représentée en fonction du carré de l'amplitude du déplacement mesuré à la source sur la figure 2.33.b. La valeur moyenne du déplacement est estimée sur cinq périodes situées au centre du train d'ondes. Pour une distance de propagation  $z = 3$  mm, l'amplitude de la pression est au plus de 160 Pa. Bien que le modèle en ondes planes ne soit plus valable à la distance  $z = 22$  mm, nous avons estimé l'ordre de grandeur de la pression quasi-statique en utilisant la même relation. Cette pression est au plus estimée égale au tiers de la valeur calculée près de la source. Ainsi, tandis que la composante cumulative de la pression auto-démodulée croît avec la distance, la composante non cumulative diminue.

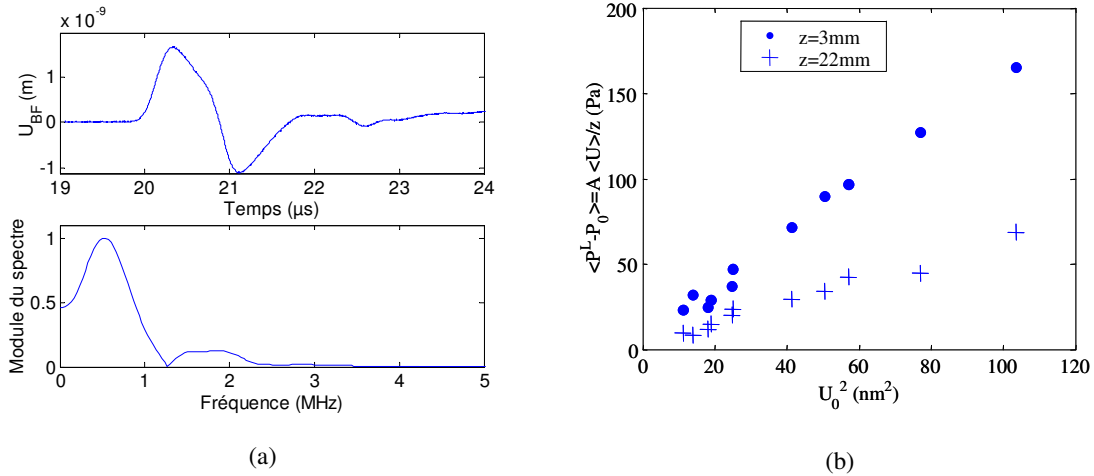


Figure 2.33 : (a) Déplacement auto-démodulé (mesuré expérimentalement) à une distance  $z = 22$  mm et module du spectre associé. (b) Excès moyen de pression  $\langle P - P_0 \rangle_{T_0}$  en fonction du carré de l'amplitude du déplacement  $U_0$ . Les points représentent les mesures effectuées à une distance  $z = 3$  mm, les croix représentent celles effectuées à  $z = 22$  mm.

### 2.6.3. Discussion

Nous discutons ici des implications de l'analyse menée plus haut sur les deux phénomènes : la pression auto-démodulée et la pression de radiation de Langevin dans le cas d'un train d'ondes.

#### 2.6.3.1. A propos de la pression auto-démodulée

Près de la source, c'est-à-dire tant que la composante quasi-statique du déplacement auto-démodulé ne s'annule pas, la directivité du transducteur et la propagation non linéaire de l'onde, créent localement une pression quasi-statique qui ne s'équilibre pas immédiatement avec la pression hydrostatique environnante (figure 2.34.b). En nous basant sur les conditions de réalisation de nos expériences, la contribution quasi-statique à la pression auto-démodulée est au plus de 160 Pa dans l'eau. Comparativement, dans l'eau, l'amplitude de la contribution cumulative est de 1000 Pa pour une distance  $z = 3$  mm. Lorsque la distance augmente (cf. figure 2.34.a), elle devient donc rapidement prépondérante. Néanmoins ces deux contributions n'apparaissent pas au même instant sur le signal de pression.

En conclusion, dans un milieu non confiné, lorsqu'une source émet un train d'ondes présentant un régime permanent (i.e. dont l'enveloppe est rectangulaire), une pression quasi-statique, qui s'identifie à l'excès moyen de pression intervenant dans la pression de radiation de Rayleigh, est créée en champ proche.

A partir des résultats des simulations numériques effectuées en variables d'Euler, nous avons calculé la composante cumulative de la pression eulerienne auto-démodulée en utilisant la relation (2.24). Son amplitude en tout point  $(x, z)$  du plan de la simulation est représentée sur la figure 2.34.a. La contribution quasi-statique est quant à elle déduite à partir du gradient du déplacement auto-démodulé à l'aide de la relation (2.27). Son amplitude dans le plan  $(x, z)$  est reportée sur la figure 2.34.b.

Au delà de la distance caractéristique de la diffraction de la composante auto-démodulée, fonction de la taille de la source et de la durée du train d'ondes, la composante quasi-statique du déplacement s'écarte de la valeur prévue par le modèle en ondes planes, et la pression quasi-statique associée ne correspond plus à la pression de radiation de Rayleigh. Ainsi, le

paramètre permettant de prévoir l'existence d'un excès moyen de pression (au sens d'une pression quasi-statique) égal à celui intervenant dans la pression de radiation de Rayleigh, est la distance caractéristique de la diffraction de la composante auto-démodulée. Cette distance est d'autant plus grande que la source est étendue, ou que la durée du train d'ondes émis est courte. Ainsi la composante quasi-statique de la pression est interprétable comme un terme non linéaire local, à la manière de la différence entre les expressions lagrangienne et eulerienne d'une même quantité.

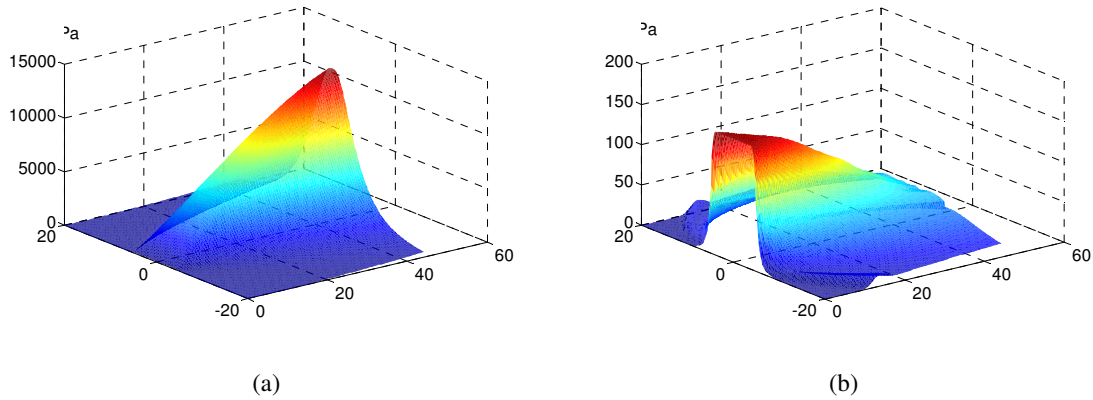


Figure 2.34 : Illustration réalisée numériquement : représentation spatiale de l'amplitude deux dimensions de la pression auto-démodulée dans l'eau en variables d'Euler.

(a) Contribution cumulative. (b) Contribution non cumulative.

Nous avons mis en évidence expérimentalement les conséquences de la diffraction du déplacement auto-démodulé. En champ lointain, la composante quasi-statique du déplacement tend à s'annuler (en particulier, celle-ci est nulle au foyer d'un transducteur focalisé, cf. figure 2.12). Ainsi, d'une part la pression quasi-statique n'est pas cumulative, d'autre part son amplitude diminue (cf. figure 2.33.b). La contribution prépondérante à la pression auto-démodulée est alors la composante cumulative. Nous retrouvons alors le résultat classique de l'auto-démodulation non linéaire, étudiée notamment par Averkiou et al<sup>70</sup>. A l'aide de la simulation numérique, nous avons mis en évidence que les effets de diffraction se manifestent à une distance d'autant plus courte que le train d'ondes est de longue durée. Averkiou *et al* présentent des mesures de la pression auto-démodulée réalisées dans la glycérine. Cette pression est créée par la propagation d'un train d'ondes de fréquence centrale 3,5 MHz et de durée 7  $\mu$ s, émis par une source de rayon 64 mm. Compte-tenu de la vitesse du son dans la glycérine ( $c_0 = 1920$  m/s), la distance caractéristique de la diffraction de la composante auto-

démodulée est alors égale à 1,2 mm. Si certaines de ces mesures ont été réalisées pour des distances proches de la source, celles présentées correspondent pour la plus proche à une distance de 4,9 cm. La forme de la pression auto-démodulée tend vers la dérivée seconde de l'enveloppe. A cette distance la contribution non cumulative, difficile à mesurer à l'aide d'un hydrophone, est de toute façon négligeable.

### 2.6.3.2. A propos de la force de radiation

Les mesures de puissance via celle de la variation de poids induite par la force de radiation acoustique sont en général réalisées dans l'eau, que l'on peut considérer comme un fluide parfait en regard de la fréquence de l'onde émise. Ces mesures étant de type eulerien, il est nécessaire de revenir à cette description. Dans le cas où la cible est parfaitement absorbante, la pression quasi-statique créée par la propagation non linéaire d'un train d'ondes s'identifie alors à l'excès moyen de pression eulerien obtenu au premier chapitre à partir de la relation (1.76) :

$$\langle P^E - P_0 \rangle_{T_0} = \left( \frac{\beta}{2} - 1 \right) \langle E \rangle_{T_0}. \quad (2.27)$$

Cette expression correspond évidemment à la valeur de la constante  $C$  (1.94) donnée par Lee et Wang dans le cas d'une cible parfaitement absorbante.

Rappelons l'expression (1.96) de la force selon l'axe  $z$  introduite au premier chapitre :

$$F_3 = - \int_S T_{33} dS = \int_S \left( \langle P^E - P_0 \rangle_{T_0} + \rho_0 \langle v^2 \rangle_{T_0} \right) dS. \quad (2.28)$$

Dans le cas d'un transducteur de taille finie émettant une onde en régime harmonique, il n'existe pas de composante statique du déplacement et il s'ensuit une annulation de la contribution statique d'origine cumulative de la pression. Ainsi, l'excès moyen de pression en coordonnées euleriennes est seulement égal à l'opposé de la valeur moyenne de la densité lagrangienne d'énergie. Il vient alors, en conservant la valeur moyenne de la densité lagrangienne d'énergie apparaissant dans l'expression (1.75) :

$$F_z = - \int_S \left( - \langle L \rangle_{T_0} - \rho_0 \langle v_3^2 \rangle_{T_0} \right) dS. \quad (2.29)$$

La force de radiation est alors indépendante du coefficient de non linéarité, comme l'a expérimentalement observé Rooney<sup>49</sup>. Ceci est donc en accord avec les conditions

expérimentales d'observation de la pression de radiation de Langevin, pour une onde harmonique, en l'absence de confinement.

Comme mentionné à la fin du premier chapitre, cette technique est aujourd'hui employée en utilisant des trains d'ondes (pour éviter l'échauffement de la cible, et l'apparition de « streaming acoustique »). Utilisée pour caractériser la puissance rayonnée par un transducteur focalisé, l'annulation de la composante quasi-statique du déplacement (cf. figure 2.12) conduit au résultat de Langevin, indépendamment de la durée du train d'ondes.

Par contre, dans le cas d'un transducteur plan, la force de radiation mesurée (dans le sens où celle-ci est soit du type Langevin, soit du type Rayleigh), dépend de la distance de mesure par rapport à la distance caractéristique de la diffraction de la composante auto-démodulée. Cette dernière dépend de la durée du train d'ondes. Si la distance séparant la cible de la source est inférieure à la distance caractéristique de la diffraction, alors la composante quasi-statique de la pression eulerienne est celle de l'expression (2.27), et la force de radiation doit théoriquement correspondre à la pression de radiation de Rayleigh. Au-delà de cette distance, l'amplitude du déplacement quasi-statique s'écarte de la croissance linéaire, et la contribution d'origine non linéaire cumulative de l'excès moyen de pression eulerien tend à s'annuler. La mesure conduit alors au résultat classique de la pression de radiation de Langevin. Néanmoins ceci n'est rigoureusement vrai qu'en champ lointain. A des distances intermédiaires, la contribution de la pression quasi-statique induirait une surestimation de la puissance émise, si celle-ci est déduite de la pression de radiation de Langevin.

On voit apparaître un point qui reste à éclaircir. En effet, pour que la pression de radiation conduise au résultat de Langevin dans le cas d'un train d'ondes, il est nécessaire que seule la constante  $C$  s'annule du fait de la diffraction affectant la composante auto-démodulée. Seul l'excès moyen de pression en coordonnées euleriennes s'annule en champ lointain (ou est égal à l'opposé de la densité lagrangienne d'énergie). En coordonnées lagrangiennes, l'excès moyen de pression doit en effet s'écrire :

$$\langle P^L - P_0 \rangle_{T_0} = \langle E \rangle_{T_0} + C = \langle E \rangle_{T_0}. \quad (2.30)$$

Autrement dit, il existerait toujours une pression quasi-statique associée au train d'ondes, mais celle-ci n'a pas une origine non linéaire cumulative. Elle n'est pas liée au déplacement

quasi-statique. Elle correspond à la transposition, en variables de Lagrange, du flux de quantité de mouvement associé à l'onde.

On comprend alors mieux pourquoi la pression de radiation est abordée par le biais de la description eulerienne. La différence entre la pression de radiation de Rayleigh et celle de Langevin est dans ce cas clairement identifiable. La constante  $C$  apparaît comme étant le seul moyen de passer de l'une à l'autre des situations tout en conservant l'hypothèse d'onde plane. L'abord du problème du point de vue de la propagation non linéaire d'une onde plane, en coordonnées lagrangiennes, conduisant nécessairement à la pression de radiation de Rayleigh, la mise en évidence d'une transition entre la pression de radiation de Rayleigh et celle de Langevin n'est pas aisée.

En pratique, la durée des trains d'ondes doit être suffisante pour permettre une « lecture » de la variation de poids induite par la force de radiation sur une balance. Par exemple, dans la référence n°60, le train d'ondes utilisé est d'une durée  $\Theta = 500 \mu s$ . En supposant une source plane de 5 mm de rayon, la distance caractéristique de la diffraction de la composante auto-démodulée est alors de quelques microns. Il apparaît difficile de mettre en évidence l'existence de la pression de radiation de Rayleigh dans ces conditions. Pour que la force mesurée dans l'eau, à une distance  $z = 1$  cm, corresponde alors à la pression de radiation de Rayleigh, il faudrait que la source plane ait un rayon de l'ordre 10 cm, pour laquelle la distance caractéristique de la diffraction serait  $L_{BF} = 2$  cm.

Des mesures (eulériennes) sur un transducteur de cette taille, réalisées à l'aide d'une balance acoustique, pour différentes distances de propagation permettraient de comparer celles du déplacement (lagrangien) réalisées avec l'interféromètre optique. Il s'agit de reprendre, à l'aide d'une source émettant un train d'ondes, les expériences réalisées par Rooney dans différents liquides, pour différentes distances.

## 2.7. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié l'auto démodulation non linéaire. D'un point de vue expérimental, nous avons montré que l'interférométrie optique est bien adaptée à la mesure de ces déplacements de basse fréquence. Outre la minimisation des effets de « streaming acoustique », l'utilisation de train d'ondes de durée relativement courte nous a permis une analyse des résultats à l'aide d'un modèle simple en ondes planes. Les coefficients de non linéarité de l'eau et de l'éthanol ont été retrouvés avec une précision comparable aux

autres méthodes de mesure utilisant la propagation des ondes acoustiques. Un essai a été mené dans l'huile de tournesol, dont l'atténuation est importante.

En champ proche, la forme du déplacement auto-démodulé correspond à celle de l'enveloppe du train d'onde. Les effets de diffraction affectant la composante auto-démodulée ont été étudiés numériquement à l'aide de la discrétisation de l'équation KZK écrite en potentiel. Les résultats numériques sont en accord avec l'expérience, et ont permis de séparer les contributions des différents phénomènes physiques mis en jeu (diffraction et atténuation). Dans l'eau et pour la configuration expérimentale utilisée (fréquence centrale du train d'ondes  $f_0 = 10$  MHz, distances de propagation inférieures à 50 mm), la diffraction de la composante auto-démodulée semble être le facteur dominant dans la limitation de l'effet cumulatif. La comparaison avec la propagation linéaire d'une enveloppe rectangulaire émise par la source tend à confirmer que la diffraction du déplacement auto-démodulé est quasi-linéaire.

Dans le cas où il existe un régime permanent du train d'ondes, le déplacement auto-démodulé présente une composante quasi-statique cumulative pour des distances inférieures à la distance de Rayleigh. Cette composante quasi-statique est interprétée comme la valeur moyenne du déplacement total. La pression auto-démodulée résulte alors, en champ proche, de la somme de deux contributions. L'une, bien connue, est cumulative et correspond aux transitoires du signal émis par la source. La seconde, associée à la valeur moyenne non nulle du déplacement, n'est pas cumulative. Nous avons montré qu'elle est l'extension de la pression de radiation de Rayleigh, usuellement introduite dans le cas d'une onde plane harmonique se propageant dans un milieu confiné. Ainsi, dans le cas de train d'ondes, la pression de radiation de Rayleigh existe en l'absence de confinement. La directivité du transducteur et la propagation non linéaire de l'onde suffisent à créer localement une pression quasi-statique sans que celle-ci s'équilibre immédiatement avec la pression environnante. Lorsque la distance de propagation augmente, la composante quasi-statique du déplacement s'écarte du comportement prévu par un modèle en ondes planes. Ainsi, en champ lointain, deux résultats usuels sont retrouvés. D'une part la pression auto-démodulée est réduite à la seule contribution cumulative, déjà amplement étudiée. D'autre part, une mesure de la force de radiation réalisée à l'aide de trains d'ondes (de durée telle que la distance de Rayleigh de la composante de basse fréquence soit inférieure à la distance séparant la source de la balance) conduit au résultat de Langevin. En ce sens, la pression quasi-statique peut être interprétée comme un effet « local » ou « de champ proche ».

Des mesures de la force de radiation exercée sur un objet immergé dans différents liquides, en fonction de la distance le séparant de la source sont envisagées. La comparaison avec une mesure du déplacement par interférométrie et les résultats de simulations numériques devrait nous permettre de mieux comprendre la transition attendue de la force de radiation de Rayleigh à celle de Langevin.





### **Chapitre 3**

Force de radiation en milieu absorbant. Application à l'étude de la non linéarité de cisaillement dans les solides mous



Après avoir étudié le cas de fluides parfaits, nous nous intéressons aux milieux absorbants, tels que les fluides visqueux ou les solides mous. Ce chapitre débute par une analyse du déplacement apériodique observé lors des expériences réalisées avec un transducteur focalisé dans l'eau (cf. figure 2.13). Nous vérifions qu'il est induit par le « streaming acoustique », écoulement créé par la pression de radiation de Langevin exercée par une onde acoustique dans un fluide visqueux.

Dans un solide mou, la force de radiation ne donne pas naissance à un écoulement, mais à une onde de cisaillement. Ces ondes sont utilisées en imagerie médicale pour mesurer l'élasticité de cisaillement des tissus biologiques : c'est l'« élastographie ». Le mécanisme et les techniques de génération et de détection de ces ondes de cisaillement, issus de travaux antérieurs réalisés au laboratoire, sont rappelés. Si l'onde de cisaillement est générée à l'aide d'un train d'ondes, les développements théoriques sur le sujet, rappelés brièvement au 3.2.2., sont par contre introduits sous l'hypothèse d'une onde harmonique. Nous étudions alors l'influence éventuelle d'une composante auto démodulée du déplacement ignorée dans ces développements théoriques sur le mécanisme de génération par force de radiation d'une onde

de cisaillement. Cette méthode de génération est ensuite appliquée à l'étude de la non linéarité de cisaillement des solides mous. A l'aide de l'hypothèse d'incompressibilité du solide mou l'élasticité de cisaillement est caractérisée expérimentalement jusqu'au quatrième ordre.

### 3.1. Streaming acoustique

Lors des mesures effectuées à l'aide du transducteur focalisé, nous avons observé une composante quasi-apériodique du déplacement de la membrane de Mylar (figure 2.13). Nous avons supposé qu'il s'agissait de la manifestation du « streaming » acoustique. Nous discutons de son influence sur nos mesures.



Figure 3.1 : Mise en évidence par P.I.V. (Particle Image Velocimetry) du « streaming » acoustique induit par une onde de fréquence  $f_0 = 800$  kHz se propageant dans le Glycérol. La photo correspond à l'état transitoire. (Depuis [http://www.lmfa.ec-lyon.fr/perso/Valery.Botton/acoustic\\_streaming\\_bis.html](http://www.lmfa.ec-lyon.fr/perso/Valery.Botton/acoustic_streaming_bis.html))

Ce phénomène est souvent utilisé dans la bande dessinée pour rendre compte visuellement de l'intensité sonore<sup>XXXI</sup>. Sur la figure 3.1 est représentée une photographie de l'écoulement d'une zone de Glycérol induit par la propagation d'une onde ultrasonore de fréquence 600 kHz. Le transducteur est focalisé. Au repos, les particules réfléchissantes forment un plan vertical. Lorsque le transducteur commence à émettre l'onde acoustique, le fluide est localement mis en écoulement. Le « streaming » acoustique aurait été observé expérimentalement bien avant la pression de radiation acoustique. Eckart<sup>100</sup> suppose que ce phénomène a été découvert par Rayleigh, qui mentionne cet effet dans un article en 1883, à propos de mesures réalisées dans un tube de Kundt<sup>101</sup>. Il l'identifie comme un phénomène du second ordre ne pouvant voir le jour en l'absence de « friction ». Ce phénomène, appelé

<sup>XXXI</sup> Par exemple, si X crie après Y, il n'est pas rare que Y ait les cheveux plaqués en arrière, comme si il se trouvait en face d'un puissant ventilateur.

parfois « vent acoustique » (ou encore « quartz wind »), a par la suite intéressé les physiciens, notamment car il perturbe les mesures d'intensité acoustique.

La force locale (i.e volumique)  $\vec{f}$  associée au streaming acoustique s'obtient en considérant la propagation d'une onde acoustique dans un fluide réel :

$$f_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}, \quad (3.1)$$

où  $T_{ik}$  est le tenseur des contraintes de Brillouin. Compte-tenu de la viscosité du fluide, il s'écrit au second ordre :

$$T_{ik} = - \left\langle \left( P^E - P_0 \right) \delta_{ik} + \rho_0 v_i v_k - \eta_s \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) - \eta_p \delta_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right\rangle_{T_0}. \quad (3.2)$$

Si l'on considère une onde plane harmonique, le champ de vitesse est de la forme  $v_3(z, t) = v_0 e^{-\alpha_0 z} e^{j(\omega_0 t - kz)}$ . Si l'on suppose que  $\langle P^E - P_0 \rangle_{T_0} = 0$  (cf. chapitre deux), le seul terme non nul du tenseur  $T_{ik}$  est alors :

$$T_{33} = -\rho_0 \langle v_3^2 \rangle_{T_0}, \quad (3.3)$$

Et la force  $f_z$ , suivant l'axe  $z$ , devient :

$$f_3(z) = \frac{\partial T_{33}}{\partial z} = \alpha_0 \rho_0 v_0^2 e^{-2\alpha_0 z} = 2\alpha_0 \langle E(z, t) \rangle_{T_0}, \quad (3.4)$$

où  $\langle E(z, t) \rangle_{T_0} = \frac{1}{2} \rho_0 v_0^2 e^{-2\alpha_0 z}$ , est la valeur moyenne temporelle de la densité d'énergie, qui décroît exponentiellement avec la distance de propagation  $z$ . Cette expression est parfois écrite sous la forme :

$$f_3(z) = \frac{2\alpha_0}{\rho_0 c_0^2} \langle p^2(z, t) \rangle_{T_0}. \quad (3.5)$$

Cette force peut s'interpréter comme la force de radiation qui s'exerce sur un plan du fluide situé en  $z$ , jouant le rôle d'objet non réfléchissant qui absorbe l'énergie acoustique. Elle est proportionnelle au coefficient d'absorption  $\alpha_0$ . Cette force résulte d'un transfert de quantité de mouvement de l'onde au milieu, en raison des effets visqueux.

En réalité, il est *a priori* nécessaire de tenir compte de la propagation non linéaire de l'onde, qui provoque un transfert d'énergie vers les harmoniques supérieures  $p_n$  de fréquence  $f_n$  (où  $n$

est un entier supérieur à un). Celles-ci sont davantage atténuées que l'onde de fréquence fondamentale. Il vient alors :

$$f_3(z) = \frac{2\alpha_0}{\rho_0 c_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \langle p_n^2(z, t) \rangle_{T_0} . \quad (3.6)$$

Ainsi, à la contribution provenant de l'atténuation de l'onde à la fréquence  $f_0$  s'ajoutent celles des harmoniques supérieures. Cette prise en compte de la génération d'harmoniques induite par la propagation non linéaire de l'onde est nécessaire dans le cas de sources plus intenses<sup>102</sup>. Notons que du point de vue de l'atténuation, cette écriture revient à considérer qu'une onde formée d'une somme infinie d'harmonique est initialement émise, puis atténuée. En toute rigueur, il faut tenir de deux choses : d'une part l'hypothèse d'une dépendance quadratique du coefficient d'atténuation en fonction de la fréquence n'est plus valable pour des très hautes fréquences et d'autre part l'extra-atténuation n'est pas prise en compte. En pratique, les auteurs ayant étudiés ce phénomène supposent que seules les premières harmoniques sont générées (il n'y a alors pas de formation d'une onde de choc). Dans le cas contraire, une simulation numérique (par exemple à partir de la discrétisation de l'équation KZK) est utilisée pour calculer le champ.

Pour l'essentiel, les études expérimentales du streaming acoustique sont basées sur les méthodes de visualisations des écoulements, telles que la Vélocimétrie par Image de Particules (P.I.V.)<sup>103,104</sup> et sur les méthodes utilisant l'effet Doppler ultrasonore<sup>105,106</sup>.

Ces considérations concernent le phénomène de streaming induit par une onde plane harmonique (en régime permanent donc), situation que nous n'avons pas observée expérimentalement. Si l'onde acoustique est émise par une source de taille finie, l'écoulement induit par l'onde acoustique est alors localisé sur l'axe de celle-ci et des vortex sont créés de part et d'autre.

Dans nos expériences, du fait de la tension de la membrane et de sa dimension finie, celle-ci n'est pas transparente à des déplacements de très basse fréquence. En conséquence, un écoulement local est en mesure de transférer une quantité de mouvement à la membrane et de la déplacer, comme nous l'avons constaté au foyer d'un transducteur focalisé (cf. figure 2.11). La réponse de la membrane dépend alors de la zone où cet écoulement se manifeste, ce qui rend notre dispositif expérimental inadéquat pour le caractériser. L'étude complète du streaming acoustique n'est pas l'objet de ce travail. Nous vérifions que cet effet peut se

manifester dans nos expériences et que dans certaines conditions, pour des trains d'ondes de durée relativement courte (1 à 2  $\mu\text{s}$ ), il n'influe pas sur les mesures.

Pour vérifier que la composante « apériodique » du déplacement de la membrane est provoquée par le streaming acoustique, nous avons mesuré l'amplitude de ce déplacement en fonction de la fréquence centrale d'un train d'ondes, au foyer du transducteur focalisé utilisé au second chapitre (fréquence centrale 10 MHz, diamètre 10 mm, distance focale 70 mm). Le résultat obtenu pour un train d'ondes de durée  $\Theta = 15 \mu\text{s}$  est reporté sur la figure 3.2.a. En rouge est représenté le déplacement mesuré pour une fréquence centrale  $f_0$  égale à 10 MHz et en bleu pour une fréquence de 9 MHz. Le transducteur possède une bande passante assez large et transmet approximativement la même amplitude pour ces deux fréquences. Pour  $\Theta = 15 \mu\text{s}$ , l'amplitude de la composante quasi-apériodique est supérieure à l'amplitude du déplacement induit par le train d'ondes (jusqu'à 3 fois supérieure pour  $f_0 = 10 \text{ MHz}$ ). Son temps caractéristique d'établissement est supérieur à la durée du train d'ondes. Sur la figure 3.2.b, le déplacement est divisé par le coefficient d'atténuation  $\alpha$  (théorique, proportionnel au carré de la fréquence centrale, en Np/m). Le résultat semble indiquer que ce déplacement dépend de ce coefficient. Afin de conclure plus précisément, il nous faudrait comparer des mesures faites dans plusieurs fluides.

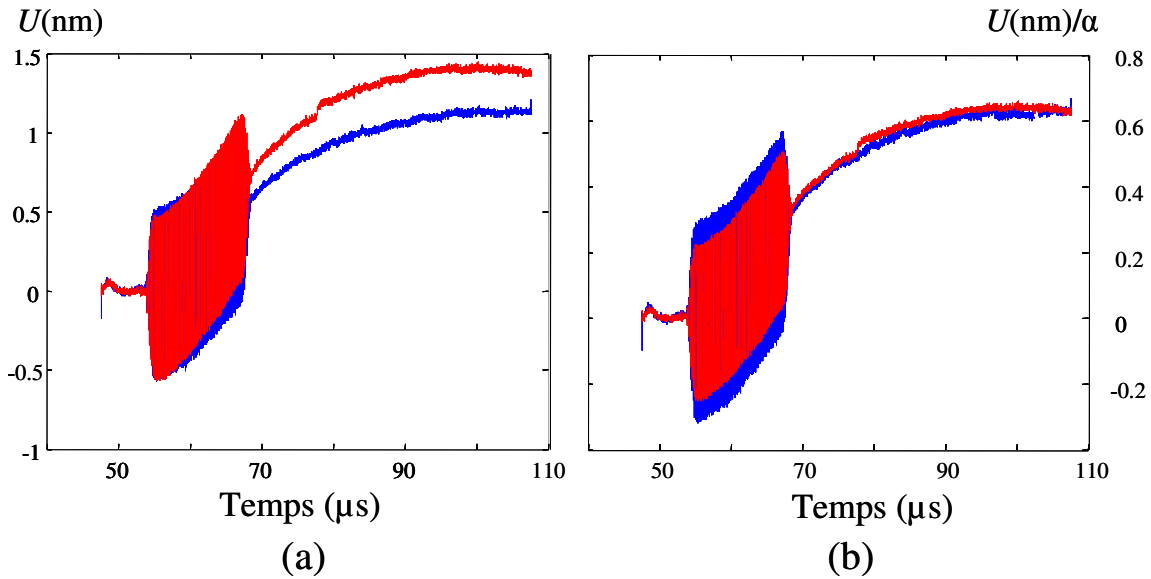


Figure 3.2 : (a) Déplacement de la membrane pour un train d'ondes de durée 15  $\mu\text{s}$ . En rouge pour une fréquence centrale  $f_0 = 10 \text{ MHz}$ , en bleu pour  $f_0 = 9 \text{ MHz}$ . (b) Déplacement divisé par le coefficient d'atténuation.



En comparant ce résultat à celui de la figure (2.12), on voit que le déplacement apériodique de la membrane est fonction de la durée du train d'ondes, lorsque la fréquence centrale est fixée. Une telle dépendance a déjà été observée sur l'amplitude de la vitesse de streaming obtenue en régime non permanent<sup>107</sup>. Ce déplacement non périodique résulte d'une accumulation d'un transfert de quantité de mouvement de l'onde au milieu<sup>22</sup>.

L'utilisation d'un train d'ondes de durée courte ( $\Theta = 1$  à  $2\mu\text{s}$ ), émis par un transducteur plan, permet de minimiser les effets de streaming, comme c'est le cas au chapitre deux.

Dans un solide mou (comme un tissu biologique), nous verrons que la force de radiation engendrée par l'atténuation d'un faisceau ultrasonore focalisé est un très bon moyen pour engendrer les ondes de cisaillement nécessaire à l'élastographie transitoire.

## **3.2. Force de radiation dans les solides mous**

Les solides mous possèdent la particularité d'avoir un comportement différent selon la fréquence des ondes élastiques. Vis-à-vis des fréquences ultrasonores utilisées en échographie (de l'ordre du MHz), ils sont assimilables à des fluides. Seules les ondes de compression peuvent se propager sur des distances appréciables (les ondes de cisaillement sont atténuées sur de très courtes distances). Vis-à-vis des ondes de basse fréquence (de l'ordre de la centaine de Hz), leur comportement est celui d'un solide : des ondes de cisaillement peuvent se propager.

Les tissus biologiques se rangent dans cette catégorie dont l'étude permet alors d'envisager de nouvelles méthodes d'imagerie médicale.

Une particularité de ces milieux biologiques est la grande différence entre les valeurs des modules d'élasticité, les coefficients de Lamé  $\lambda$ , qui est de l'ordre du GPa et  $\mu$ , dont les valeurs sont comprises entre le kPa et la centaine de kPa selon les tissus. En conséquence si les ondes de compression s'y propagent à une vitesse proche de celle de l'eau ( $V_L \cong 1500 \text{ m.s}^{-1}$ ), la vitesse des ondes de cisaillement est beaucoup plus faible ( $V_T$  est de l'ordre de quelques  $\text{m.s}^{-1}$ ).

Cette faible valeur de la vitesse des ondes de cisaillement dans les solides mous permet d'obtenir des nombres de Mach acoustiques assez proches de l'unité. Ces milieux sont donc un terrain d'expérimentation favorable à l'observation des effets de la non linéarité cubique des ondes planes de cisaillement (de l'ordre du nombre de Mach au cube), difficiles à

observer dans les solides classiques. Ainsi l'étude des solides mous est intéressante, tant du point de vue fondamental que de celui des applications.

### 3.2.1. Elastographie impulsionnelle

La grande différence entre les modules de compression et de cisaillement joue sur le module d'Young  $E$ , qui caractérise la rigidité d'un solide mou. En négligeant la dispersion et l'atténuation, il s'écrit.

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \cong 3\mu. \quad (3.7)$$

La rigidité d'un tel milieu est donc liée pour l'essentiel à la valeur du module de cisaillement  $\mu$ . L'examen de palpation permettant de repérer l'éventuelle présence de nodules plus durs, constitue donc une évaluation qualitative du module de cisaillement  $\mu$  (via celle du module d'Young  $E$ ), que l'échographie standard ne permet pas. Une méthode élégante, permettant une mesure quantitative du module de cisaillement, indépendante de l'opérateur, existe : il s'agit de l'élastographie.

L'élastographie impulsionnelle, développée au LOA<sup>108</sup> est un procédé d'imagerie utilisant des ondes de cisaillement de basse fréquence pour caractériser un milieu. On engendre une onde de cisaillement en appliquant à la surface du milieu une impulsion de basse fréquence (un « coup » dont le spectre est centré autour d'une centaine de Hz) et la propagation de cette onde de cisaillement est imagée au moyen d'une onde ultrasonore de compression (quelque MHz) se réfléchissant partiellement sur les hétérogénéités (diffuseurs<sup>xxxii</sup>) du milieu biologique<sup>xxxiii</sup>. Une onde de cisaillement se propageant à la vitesse de quelque m/s dans les tissus, une cadence de plusieurs milliers d'images par seconde est nécessaire pour suivre au cours du temps l'évolution des déplacements qu'elle induit. A l'aide de la résolution du problème inverse, la valeur du module de cisaillement est alors déduite du film de la propagation de l'onde de cisaillement. Si une inclusion plus dure (potentiellement pathologique) est présente, ceci se traduit par une valeur du module de cisaillement plus grande. Dans les premiers dispositifs créés au LOA, le « coup » de basse fréquence est appliqué par une barrette d'imagerie montée sur un pot vibrant. Les premiers résultats obtenus

<sup>xxxii</sup> Les tissus biologiques présentent des hétérogénéités, qui diffusent l'onde ultrasonore. Elles donnent lieu à une signature sur les images échographiques, connue sous le nom de « speckle ».

<sup>xxxiii</sup> L'élastographie impulsionnelle s'oppose aux deux autres méthodes d'élastographie. L'une, dite statique, consiste à appliquer une compression statique au milieu et à comparer les images échographiques obtenues avant et après cette compression. L'autre consiste à détecter les déplacements créés par une source harmonique de basse fréquence.

*in vivo* sont prometteurs<sup>109</sup>. Néanmoins, l'ensemble, pot vibrant et barrette échographique, est plus lourd que la barrette seule, ce qui rend sa manipulation plus difficile pour le praticien.

Ces dernières années, une nouvelle méthode d'élastographie a vu le jour. Elle est basée sur une technique de génération de l'onde de cisaillement élégante utilisant la pression de radiation, liée à l'atténuation du milieu<sup>110</sup>. La pression de radiation est créée dans le milieu à l'aide d'une onde ultrasonore de compression (un train d'ondes de haute fréquence focalisé dans le milieu par une barrette échographique). En raison de l'atténuation, une partie de la quantité de mouvement de l'onde est transférée au milieu. Ce dernier est alors localement poussé, puis relâché lorsque cesse le train d'ondes. En conséquence, il apparaît une impulsion de cisaillement de basse fréquence polarisée suivant la profondeur de champ de la tache focale de l'onde de compression (l'axe  $z$ ) et se propageant perpendiculairement. L'imagerie de la propagation de cette impulsion par la même barrette échographique et la résolution du problème inverse permettent de remonter à la valeur locale du module de cisaillement. Ainsi, du point de vue du praticien, le protocole est très proche de celui d'une échographie standard. Les mécanismes mis en jeu lors de la création de cette force de radiation diffèrent de ceux intervenant dans le cas d'un fluide homogène idéal. En raison de l'atténuation de l'onde et de sa diffusion par des hétérogénéités, elle résulte d'un transfert de quantité de mouvement de l'onde au milieu. Le mécanisme est celui à l'origine du streaming acoustique, abordé au 3.1. La création de l'onde de cisaillement et le streaming sont deux conséquences distinctes d'un même phénomène.

### 3.2.2. Génération et détection des ondes de cisaillement

#### 3.2.2.1. Approche théorique

Dans les solides mous tels que les tissus biologiques ou les gels, la force de radiation permet de créer localement et à distance, une impulsion de cisaillement. En raison de son apport à la mesure de l'élasticité des tissus biologiques pour la détection de pathologies, ce phénomène a fait l'objet de nombreux travaux<sup>111, 112, 113, 114</sup>. Bien qu'il s'agisse d'un effet du second ordre, l'excès moyen de pression en coordonnées eulériennes est *a priori* supposé nul, comme au 3.1 ou dans les applications mentionnées au premier chapitre (cf. 1.2.9.2). Ceci revient donc à négliger la propagation non linéaire cumulative de l'onde. L'expression usuelle de la force (volumique) de radiation créée par une onde harmonique plane est :

$$f_3 = \frac{2\alpha_0}{c_0} \langle W(z) \rangle_{T_0}, \quad (3.8)$$

où  $W = c_0 E$  est l'intensité acoustique. Cette force s'identifie donc bien à la force de streaming acoustique dans les fluides (3.5).

La génération d'une onde de cisaillement induite par la force de radiation peut être interprétée de la façon suivante : lorsqu'une onde ultrasonore se propage, celle-ci transfère une partie de sa quantité de mouvement au milieu qu'elle traverse, donc le milieu est localement poussé pendant la durée de l'application de l'onde. La réponse du milieu à ce mouvement se traduit par la génération d'une onde de cisaillement de basse fréquence, qui se propage donc perpendiculairement à la direction de la poussée. Deux phénomènes peuvent rendre possible ce transfert : l'absorption de l'onde par les effets thermo-visqueux et la diffusion sur des hétérogénéités<sup>115, XXXIV</sup>.

Nous rappelons ici une partie des travaux réalisés par Jeremy Bercoff pendant sa thèse<sup>113</sup>. L'action de la force de radiation dans les tissus est équivalente à celle d'une source mécanique volumique. Il convient donc de modéliser la réponse des tissus mous élastiques à cette excitation. Le problème est traité par l'introduction de la fonction de Green élastique, qui traduit la réponse du milieu à une sollicitation  $\vec{f}_0$  créée par une source élémentaire (i.e. ponctuelle et impulsionnelle) :

$$\vec{f}_0(\vec{r}, t) = \vec{m} \delta(t) \delta(\vec{r}), \quad (3.9)$$

où  $m = \|\vec{m}\|$  est l'amplitude de la source.

Aki et Richards ont montré que le déplacement, solution de l'équation de Navier Stokes avec pour terme source la force (3.9), peut s'exprimer comme la somme de trois fonctions de Green<sup>116</sup> :

$$u_i(\vec{r}, t) = m_j \left( g_{ij}^L(\vec{r}, t) + g_{ij}^T(\vec{r}, t) + g_{ij}^{LT}(\vec{r}, t) \right), \quad (3.10)$$

où  $i$  est la composante du déplacement et  $j$  représente la direction de la force impulsionnelle.

Les fonctions de Green  $g_{ij}^L$  et  $g_{ij}^T$  correspondent à des ondes bipolaires, respectivement de compression et de cisaillement. Leur amplitude, décroissante en  $1/r$ , est inversement proportionnelle au carré de la vitesse de propagation. Ainsi, dans les solides mous le terme de compression se propage beaucoup plus rapidement et son amplitude en champ lointain est très

---

<sup>XXXIV</sup> L'analyse de cette signature permet d'imager les déplacements associés à la propagation d'une onde de cisaillement par interférométrie speckle ultrasonore<sup>108</sup>.

inférieure à celle du terme de cisaillement. La troisième fonction  $g_{ij}^{LT}$  correspond à un couplage entre compression et cisaillement. C'est une onde qui se propage à la vitesse des ondes de cisaillement, dont l'amplitude décroît en  $1/r^2$ . Elle correspond donc à un terme de champ proche. A l'échelle des temps caractéristiques des ondes de cisaillement (la milliseconde), pour laquelle l'onde de compression se propage quasi-instantanément, J. Bercoff a mis en évidence que sur l'axe perpendiculaire à la direction de la force, le terme prépondérant de la fonction de Green est celui associé à l'onde de cisaillement  $g_{ij}^T$ . Par ailleurs, selon l'axe de la force, seul le terme de couplage intervient, et son amplitude décroît rapidement avec la distance.

En supposant que la durée d'application de la force est égale à la durée  $\Theta$  du train d'ondes, la force de radiation s'écrit<sup>113</sup>:

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \frac{2\alpha_0}{\rho_0 c_0^2} p^2(\vec{r}) \text{rect}(\Theta) \vec{e}_z, \quad (3.12)$$

où  $p(\vec{r})$  traduit la distribution spatiale du champ pression et  $\text{rect}(\Theta)$  sa distribution temporelle.

La réponse du milieu à la sollicitation mécanique induite par la force de radiation est alors, en régime linéaire, la convolution spatio-temporelle de la force par la fonction de Green élastique.

Lors de la thèse de J. Bercoff<sup>113</sup>, une méthode originale de génération d'un onde de cisaillement exploitant la force de radiation a été développée. Elle est basée sur l'utilisation d'une barrette échographique classique couplée à une électronique d'émission réception entièrement programmable. Un train d'ondes de durée  $\Theta = 100 \mu s$  est focalisé par la barrette à la profondeur désirée. La force de radiation résultante crée une source mécanique qui pousse momentanément les tissus dans la direction du faisceau ultrasonore. Les déplacements mécaniques associés à l'impulsion de cisaillement (polarisée dans la direction du faisceau ultrasonore et qui se propage perpendiculairement), sont ensuite imagés à l'aide d'un échographe ultrarapide.

### 3.2.2.2 Dispositif d'imagerie ultra-rapide

La barrette échographique est reliée au dispositif d'imagerie ultrarapide, composé de 128 canaux programmables<sup>117</sup>. Contrairement à l'imagerie échographique classique (figure 3.3.a), la barrette émet une onde plane (figure 3.3.b) et la formation de voie (« beamforming ») est réalisée en réception seulement. Cette méthode permet d'augmenter la

cadence d'image puisque le milieu n'est insonifié qu'une seule fois. La cadence maximale atteinte lors de la thèse de Jeremy Bercoff<sup>113</sup> est d'environ 8 kHz pour une profondeur d'inspection de 6 cm.

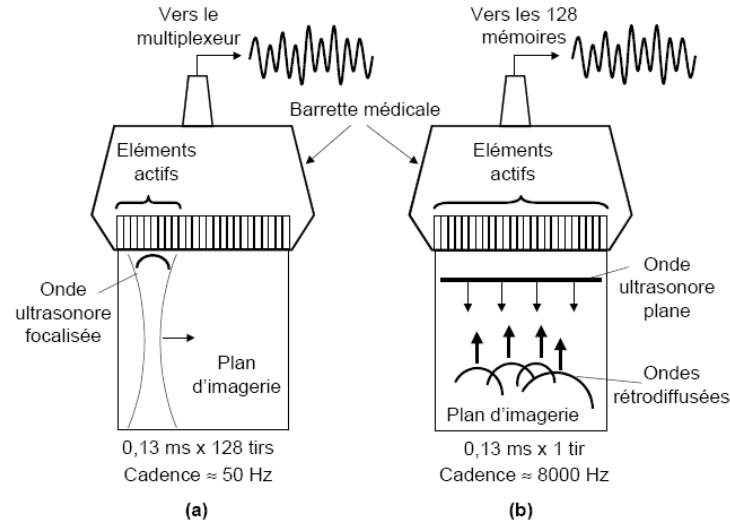


Figure 3.3: (a) Imagerie classique. (b) Imagerie ultrarapide

Les signaux rétro-diffusés par les hétérogénéités sont enregistrés sur les 128 voies de la barrette. La matrice des signaux contient la signature acoustique de la zone inspectée. La formation de voies consiste à recaler temporellement les échos correspondant à une profondeur donnée avant de les sommer sur l'ensemble des voies de l'échographe. Le processus est ensuite répété pour une zone plus profonde. Ces signaux sont ensuite traités par intercorrelation<sup>118</sup>.

### 3.2.2.3 Traitement des signaux.

Exposons le principe de l'algorithme appliqué aux signaux enregistrés sur un transducteur du réseau. Une fenêtre correspondant à une profondeur donnée est extraite pour chaque signal. La fonction d'intercorrelation de deux fenêtres acquises successivement est calculée. Le décalage temporel  $\Delta t$  qui rend cette fonction maximale correspond au temps entre deux tirs pendant lequel les diffuseurs se sont déplacés sous l'action de l'onde de cisaillement (selon l'axe du faisceau ultrasonore) d'une distance égale à  $u = c_0 \Delta t$ . Si les signaux sont corrélés deux à deux, la quantité obtenue est la vitesse particulière. En décalant la fenêtre de quelques points, on sélectionne une autre profondeur. On obtient donc la vitesse particulière le long d'une ligne suivant la profondeur. Une application de cet algorithme à chaque ligne des images échographiques successives donne le champ des vitesses particulières dans un plan.

### 3.2.2.4. Validation du modèle théorique.

La comparaison entre le déplacement mesuré près du point source et les fonctions de Green élastique et visco-élastique est représentée sur la figure 3.4. Si la fonction de Green élastique semble bien reproduire le comportement temporel du déplacement induit par la force de radiation, la prise en compte de la durée d'application du train d'ondes et de la viscosité pour le calcul de la fonction de Green est nécessaire pour retrouver l'amplitude du déplacement expérimental. A l'échelle des temps caractéristiques des ondes de cisaillement, la réponse du milieu à la force de radiation créée par un train d'ondes peut donc être modélisée par la fonction de Green.

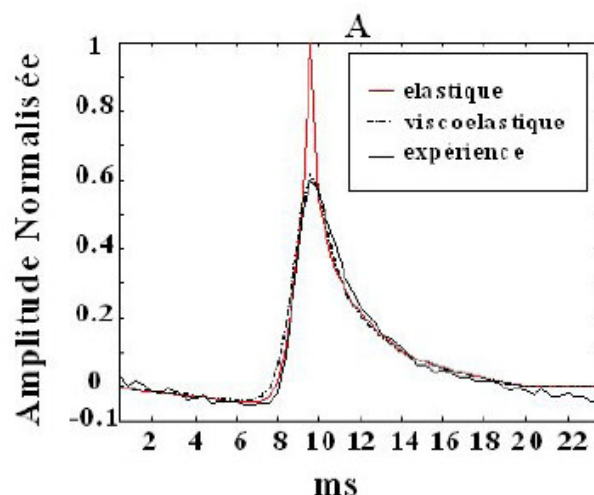


Figure 3.4 : Comparaison de l'évolution temporelle du champ déplacement expérimental et simulé (fonctions de Green élastique et visco-élastique), en un point proche de l'axe du faisceau ultrasonore (d'après J. Bercoff<sup>113</sup>).

### 3.2.2.5. Mode supersonique

Pour créer une onde de cisaillement quasi-plane dans le plan « imagé », il est possible d'utiliser une source mobile. Il s'agit de focaliser le train d'ondes à différentes profondeurs successives dans le milieu. Si la vitesse de déplacement du point focal (donc de la source mécanique des ondes de cisaillement) est supérieure à la vitesse de propagation des ondes de cisaillement (quelques  $\text{m.s}^{-1}$ ), les ondes de cisaillement générées interfèrent alors constructivement sur une surface appelée « cône de Mach »<sup>xxxv</sup>. Cette technique permet de créer un front d'onde de cisaillement quasi-plan dans le plan de la barrette échographique<sup>113</sup>.

<sup>xxxv</sup> Ce cône est l'analogue de celui formé lors du vol supersonique d'un avion.

Cette méthode est baptisée « mode supersonique »<sup>119, 120</sup>. Son principe est illustré sur la figure 3.5, dans le cas où la vitesse de déplacement de la source vaut trois fois la vitesse de propagation des ondes de cisaillement.

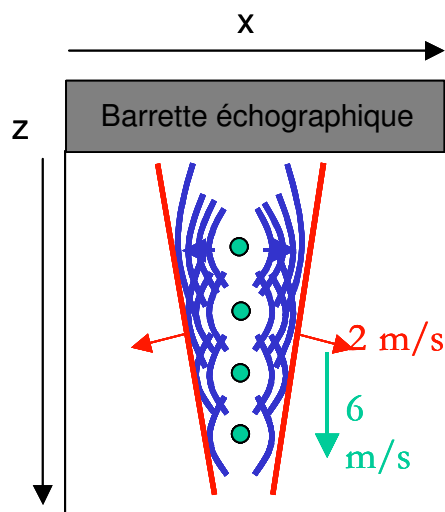


Figure 3.5: Schéma du mode supersonique permettant la génération d'une onde de cisaillement quasi plane dans plan de la barrette échographique.

Nous avons utilisé cette technique pour réaliser une expérience d'acousto-élasticité (cf. paragraphe 3.4).

### 3.2.3. Etude expérimentale de la contribution de l'auto démodulation non linéaire

En négligeant la propagation non linéaire de l'onde, les modèles précédents ne tiennent pas compte d'une contribution possible de la composante auto-démodulée à la génération de l'onde de cisaillement. Au chapitre précédent, nous avons vu que dans un liquide, pour un train d'ondes dont l'enveloppe est rectangulaire, le déplacement auto-démodulé au foyer d'un transducteur focalisé est constitué de deux courtes impulsions de signes opposés. Il n'y a donc pas de composante quasi-statique du déplacement, et la force de radiation est donc celle de Langevin. Par contre la pression auto-démodulée n'est elle pas nulle. Il est donc envisageable qu'elle contribue à la génération d'une onde de cisaillement. Afin d'étudier cette possibilité, nous avons mesuré le déplacement auto-démodulé dans un gel. Nous avons effectué des mesures dans un gel de gélatine pure (sans diffuseurs d'Agar) à



l'aide du dispositif expérimental décrit au chapitre deux (cf. figure 2.7)<sup>xxxvi</sup>. La gélatine, encore liquide, est coulée dans le bâti en plexiglas. Celui-ci est entouré de glace afin de refroidir l'ensemble pour solidifier la gélatine. Le déplacement auto-démodulé, mesuré à une distance  $z = 3$  cm de la source dans la gélatine liquide est représenté sur la figure 3.6.a.

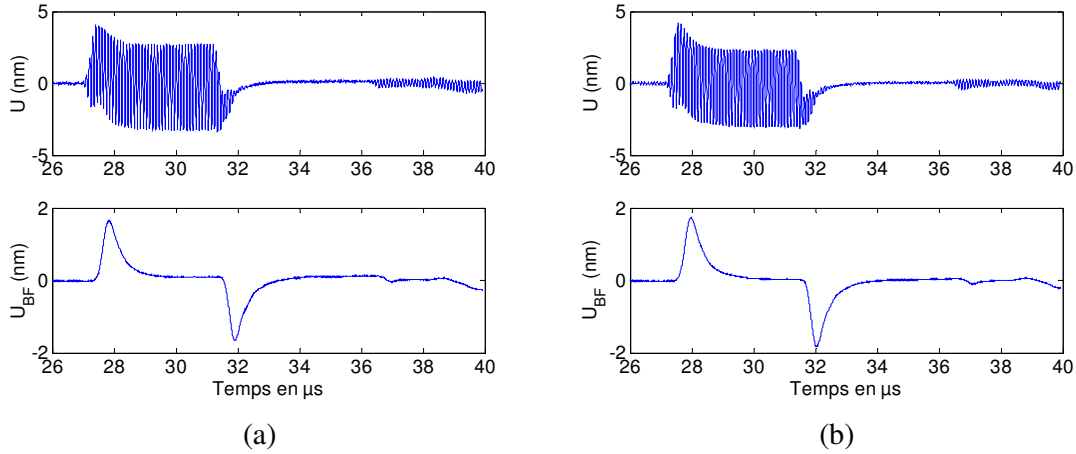


Figure 3.6 : Déplacement total  $U$  et sa composante auto-démodulé  $U_{BF}$  générés par le transducteur plan dans un gel de gélatine en cours de prise. La durée du train d'ondes est  $\Theta = 4 \mu s$ , la distance transducteur-membrane est  $z = 3$  cm. (a) Début de l'expérience : gélatine liquide. (b) Quatre heures après : gélatine solide.

On retrouve la forme du déplacement auto-démodulé étudié au deuxième chapitre. En particulier, sa composante quasi-statique est bien nulle à cette distance. La mesure faite quatre heures après refroidissement est reportée sur la figure 3.6.b. Hormis une légère diminution de l'amplitude et un décalage temporel dû à une diminution de la célérité (variation de température), le déplacement auto-démodulé n'a pas changé de forme après la solidification. Ceci atteste du comportement du gel analogue à celui des liquides vis à vis des ondes de compression. Par ailleurs, on ne remarque pas ici d'effet de la force de radiation induit par l'atténuation créant un déplacement de basse fréquence induit par la force de radiation ultrasonore tel que celui mesuré par Callé *et al* à l'aide d'un interféromètre optique<sup>114</sup>. En effet, la durée du train d'ondes de fréquence centrale 1 MHz utilisée dans cette référence pour générer une onde de cisaillement dans un gel est de  $300 \mu s$  (soit 300 cycles), alors qu'elle est de  $4 \mu s$  (soit 40 cycles) dans l'expérience réalisée ici. Comme nous l'avons vu pour le streaming acoustique, l'amplitude de l'onde de cisaillement augmente avec la durée du train d'ondes lorsque la fréquence du train d'ondes est fixée<sup>114</sup>.

<sup>xxxvi</sup>Le transducteur utilisé est plan, de diamètre 10 mm. Le train d'ondes émis à une fréquence centrale  $f_0 = 10$  MHz.

Afin de nous rapprocher des conditions expérimentales des applications médicales de la force de radiation, nous avons ensuite réalisé une mesure optique du déplacement engendré par une barrette échographique de 128 éléments et de fréquence centrale  $f_0 = 4,3$  MHz, à la surface d'un gel constitué de 5 % de gélatine et de 3 % d'Agar (cf. figure 3.7). Le rôle de l'Agar est de mimer les propriétés diffusantes des tissus biologiques, qui rendent possible l'imagerie de la propagation des ondes de cisaillement<sup>108</sup>.

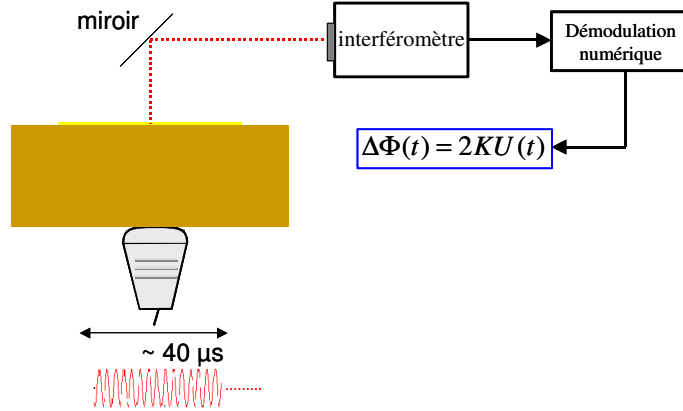


Figure 3.7: Dispositif expérimental de mesure du déplacement à la surface d'un gel

Un train d'ondes de fréquence centrale  $f_0 = 4,3$  MHz et de durée  $\Theta = 40 \mu s$  est émis par la barrette échographique. La loi de retard appliquée aux 128 éléments piézo-électriques de la barrette est telle qu'elle focalise à la surface du gel (d'épaisseur 4 cm). Une feuille de Mylar optiquement réfléchissante, est déposée à la surface du gel et ses déplacements sont mesurés à l'aide de l'interféromètre optique (cf. chapitre 2). Compte-tenu des déplacements de très basse fréquence attendus, une démodulation numérique est utilisée<sup>xxxvii</sup>. La composante de basse fréquence est isolée à l'aide d'un filtrage (numérique) passe-bas de fréquence de coupure 1 MHz. Le déplacement total  $U$  et sa composante de basse-fréquence  $U_{BF}$  sont représentés sur la figure 3.8. Une composante de très basse fréquence, dont l'extension temporelle dépasse celle de la fenêtre numérisée (imposée par la fréquence d'échantillonnage), est présente. Sur cette fenêtre d'observation son amplitude atteint 300 nm, soit presque 6 fois celle du déplacement associé au train d'ondes (environ 50 nm). Le déplacement filtré est représenté sur la figure 3.8.b. Le déplacement auto-démodulé, déjà observé dans le cas d'un train d'ondes focalisé dans l'eau (cf. figure 2.32) est superposé à la composante de très basse fréquence créée par l'atténuation du train d'ondes. Son amplitude est bien inférieure à celle de la composante de très basse fréquence.

<sup>xxxvii</sup> Rappel : l'électronique de démodulation analogique contient un filtre passe-bande à  $70 \pm 10$  kHz, nécessaire à la reconstitution de la porteuse non modulée.

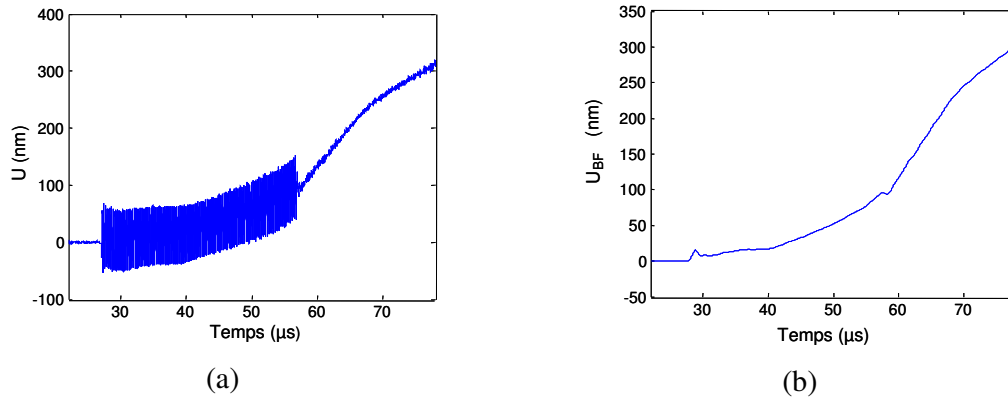


Figure 3.8 : Déplacement total  $U$  (a) et sa composante de basse fréquence  $U_{BF}$  (b) mesurés à la surface d'un gel d'Agar-gélatine. Le train d'ondes de fréquence centrale  $f_0 = 4,3$  MHz et de durée  $\Theta = 40 \mu s$  est focalisé par la barrette à la surface du gel.

Ce résultat suggère que si la composante auto-démodulée du train d'onde participe au mécanisme de génération d'une impulsion de cisaillement, elle n'est pas prépondérante.

Nous avons réalisé une expérience pour tester cette hypothèse. Nous avons vu au chapitre deux qu'au foyer d'un transducteur focalisé, le déplacement auto-démodulé tend vers la dérivée temporelle (l'amplitude restant finie) de l'enveloppe du train d'ondes. Ainsi, en émettant un train d'ondes dont l'amplitude varie linéairement avec le temps, le déplacement auto-démodulé au foyer du transducteur n'est plus symétrique. En utilisant le même transducteur focalisé qu'au chapitre deux ( $f_0 = 10$  MHz, diamètre 10 mm, distance focale 70 mm), nous avons vérifié cette hypothèse en effectuant une mesure dans l'eau. Les déplacements observés sont représentés sur la figure 3.9 dans le cas d'une rampe montante. Le déplacement auto-démodulé possède, aux transitoires près, l'allure de la dérivée temporelle de l'enveloppe. Si le déplacement auto-démodulé participe à la génération de l'onde de cisaillement dans un gel, l'amplitude du déplacement de cette dernière doit être moindre en utilisant un train d'ondes avec une enveloppe sous forme de rampe montante qu'avec une enveloppe en forme de rampe descendante. Dans le premier cas, l'auto-démodulation provoque un déplacement des tissus dans le sens opposé à celui de la poussée induit par l'atténuation. Dans le second cas le déplacement auto-démodulé est de même signe que celui induit par la poussée.

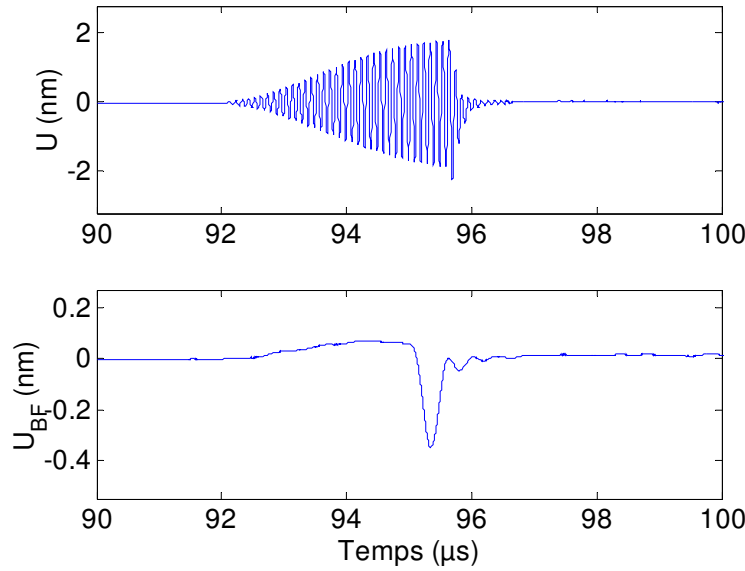


Figure 3.9 : Déplacement total  $U$  et sa composante auto-démodulée  $U_{BF}$  mesurés dans l'eau au foyer d'un transducteur focalisé ( $f_0 = 10$  MHz,  $\varnothing = 10$  mm, distance focale 70 mm).

Nous avons réalisé l'expérience suivante : un train d'ondes de durée  $\Theta = 500 \mu\text{s}$  est focalisé dans un gel d'Agar-gélatine avec un dispositif expérimental identique à celui décrit plus haut (cf. figure 3.7). L'onde de cisaillement est détectée à l'aide de l'échographe ultrarapide déjà décrit. Sa vitesse particulière est représentée sur la figure 3.10 en fonction de la distance (et non du temps). Il s'agit d'un signal bipolaire dont la fréquence centrale est proche de 50 Hz. Son amplitude est assez faible (environ 5 mm/s). La même expérience est alors reconduite tout d'abord avec un train d'ondes dont l'amplitude croît linéairement avec le temps (cf. figure 3.11.a en rouge), puis avec un train d'ondes dont l'amplitude décroît (cf. figure 3.11. en noir). Les vitesses particulières des ondes de cisaillement obtenues sont comparées sur la figure 3.11.b. Leur amplitude est plus faible que dans le cas d'une enveloppe rectangulaire de même durée, car la valeur moyenne de l'énergie de l'onde incidente est plus faible. Sur la figure 3.11.b, on constate que la forme des deux signaux est assez semblable, ce qui confirme le rôle prépondérant du transfert de quantité de mouvement induit par l'atténuation dans le mécanisme de génération de l'onde de cisaillement. Ceci est en accord avec le fait que lorsque la durée du train d'ondes est diminuée, l'amplitude de la composante auto-démodulée ne change pas, l'onde de cisaillement est d'amplitude trop faible pour être détectée. Il semble néanmoins que la contribution de l'auto démodulation n'est pas tout à fait négligeable. Dans le cas d'une rampe descendante (en noir), la contribution de la composante auto-démodulée du déplacement au point focal est de même signe (positif) que le transfert de quantité de

mouvement. A l'inverse, pour une enveloppe de type rampe montante la contribution est de signe opposé.

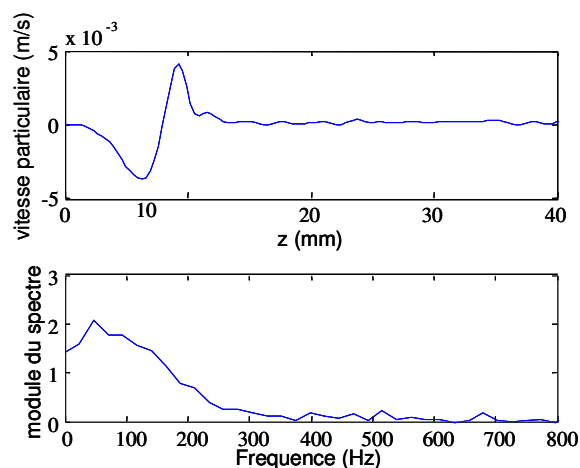


Figure 3.10 : Vitesse particulaire associée à l'onde de cisaillement générée dans un gel par un train d'onde dont l'enveloppe est de forme rectangulaire. Module du spectre associé.

Cette tendance est observée sur les résultats présentés, mais le rapport signal sur bruit est trop faible pour la confirmer. Il est d'ailleurs possible que ces deux trains d'ondes conduisent à des transferts de quantité de mouvements qui ne soient pas identiques.

Par ailleurs, on observe aussi un retard de l'onde de cisaillement dans le cas d'une rampe montante. Compte-tenu de la vitesse de propagation des ondes de cisaillement dans ce gel (2 m/s), il est de l'ordre de 150  $\mu$ s. Dans le cas d'une rampe montante, l'onde de cisaillement est principalement générée à la fin du train d'ondes, lorsque l'amplitude est maximale.

La composante auto-démodulée n'est donc pas prépondérante dans le processus de génération de l'onde de cisaillement. Sa contribution éventuelle est difficile à mettre en évidence expérimentalement compte-tenu du faible rapport signal sur bruit. Une étude numérique utilisant les fonctions de Green visco-élastiques est en cours.

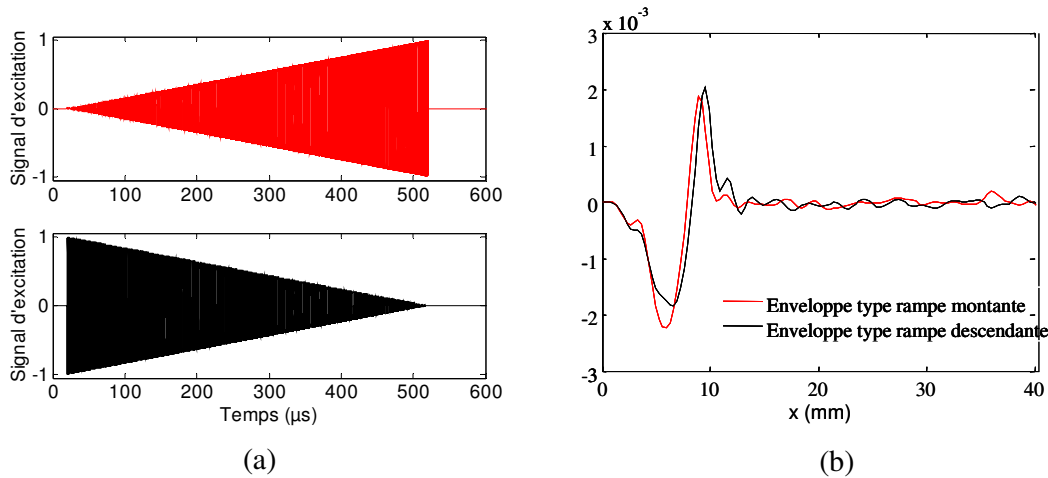


Figure 3.11 : (a) Signal d'excitation de la barrette échographique. En rouge, cas d'un train d'ondes dont l'enveloppe à la forme d'une rampe montante. En noir : cas d'une rampe descendante. (b) Vitesse particulière de l'onde de cisaillement résultante à un instant donné, en fonction de la distance  $x$ . En rouge : l'onde de cisaillement induite par un train d'onde dont l'enveloppe à la forme d'une rampe montante. En noir : cas d'une rampe descendante.

### 3.3. Propagation non linéaire des ondes de cisaillement dans les milieux mous quasi-incompressibles

Pour rendre compte des effets non linéaires affectant la propagation d'une onde de compression dans un fluide ou d'une onde longitudinale dans un solide, un développement à l'ordre deux des équations constitutives est suffisant. En considérant la densité d'énergie, ce développement est alors fait au 3<sup>ème</sup> ordre. Il en va autrement pour les ondes transversales. En effet, les termes non linéaires quadratiques mis en jeu dans la propagation d'une onde transversale plane dans un solide isotrope s'annulent. Ainsi, pour rendre compte de la non linéarité de ces ondes, il est nécessaire de développer l'énergie potentielle élastique jusqu'au 4<sup>ème</sup> ordre. Les termes associés à la propagation non linéaire d'une onde de cisaillement plane sont donc cubiques, soit de l'ordre du cube du nombre de Mach  $\epsilon_T = v/V_T$ . Dans les solides classiques (tels que les métaux), la vitesse de propagation des ondes transversales est différente de celle des ondes longitudinales, mais elle reste néanmoins du même ordre de grandeur. De plus la génération d'une onde plane transversale de grande amplitude est délicate dans ces matériaux. Pour ces raisons, le nombre de Mach associé  $\epsilon_T$  est toujours très faible et la mise en évidence expérimentale des phénomènes non linéaires propres aux ondes transverses est difficile.

En revanche, dans les solides mous, la faible valeur de la vitesse de propagation des ondes de cisaillement  $V_T$  permet d'obtenir un nombre de Mach associé très élevé (proche de l'unité). Ces milieux sont donc favorables à l'observation de phénomènes propres à la non linéarité de cisaillement, et le coefficient de non linéarité associé peut être estimé. L'étude expérimentale de la non linéarité de cisaillement a été initiée au laboratoire par Stefan Catheline et Jean-Luc Gennisson, à l'aide du dispositif expérimental qui sera décrit au paragraphe 3.5.2.

Par ailleurs, compte-tenu de la grande différence entre les modules de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , il est possible, du point de vue des ondes de cisaillement, de considérer le solide mou comme incompressible. Sous cette hypothèse, Hamilton, Il'inski et Zabolotskaya ont montré en 2004 que l'énergie de déformation (associée à l'onde de cisaillement seule) s'en trouve simplifiée<sup>121</sup>. Le coefficient de non linéarité de cisaillement est alors une combinaison linéaire de seulement trois constantes élastiques du second, troisième et quatrième ordre :  $\beta_T = \beta_T(\mu, A, D)$ . Nous avons tiré profit de ce modèle récent afin de caractériser jusqu'au quatrième ordre l'élasticité de cisaillement des solides mous. Deux expériences successives, réalisées sur le même solide mou, permettent d'estimer les valeurs des coefficients  $\mu$ ,  $A$  et  $D$ . Nous en présentons ici les résultats. La première expérience, basée sur la mesure des variations de la vitesse de phase des ondes induites par une contrainte uniaxiale, et connue sous le nom d'acoustoélasticité, permet la mesure des constantes  $\mu$  et  $A$ . La seconde, basée sur la propagation d'une onde plane de cisaillement de grande amplitude, permet d'estimer le coefficient de non linéarité  $\beta_T$  via la mesure de l'amplitude de la troisième harmonique. La combinaison de ces deux mesures donne alors une estimation de la constante élastique du 4<sup>ème</sup> ordre  $D$  du solide mou.

### 3.3.1. Approche théorique

#### 3.3.1.1. Tenseur des déformations

Nous cherchons à écrire l'équation de propagation des ondes élastiques dans un solide mou, supposé isotrope. L'énergie élastique d'un solide soumis à une déformation s'exprime en fonction de l'entropie et du tenseur des déformations, qui a pour composantes :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right). \quad (3.13)$$

Ce tenseur décrit l'état déformé du solide dans les coordonnées de Lagrange  $(\vec{a}, t)$ . Le terme non linéaire du membre de droite de l'équation (3.13) est usuellement appelé « non linéarité géométrique ».

### 3.3.1.2. Densité d'énergie potentielle élastique

Considérons une onde se propageant sans perte dans un solide isotrope. Le déplacement  $\vec{U}$  de la particule solide, qui est initialement localisée en  $\vec{a}$ , est décrit à l'aide de la relation fondamentale de la dynamique :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial a_k}, \quad (3.14)$$

où  $P_{ik}$  est le tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff, défini par<sup>122</sup> :

$$P_{ik} = \frac{\partial E_p}{\partial (S_{ik})}. \quad (3.15)$$

$E_p(\vec{S})$  est l'énergie potentielle élastique du solide. Comme pour les fluides, la loi de comportement est ensuite développée en fonction du tenseur des déformations, en supposant que celles-ci sont faibles. Un développement jusqu'à l'ordre trois est suffisant pour rendre compte des phénomènes non linéaires quadratiques affectant la propagation des ondes longitudinales. Pour les ondes de cisaillement, il est par contre nécessaire de poursuivre le développement un ordre plus loin, pour rendre compte de la non linéarité cubique.

Commençons par un développement jusqu'à l'ordre trois de la densité d'énergie potentielle élastique d'un solide. Dans le cas général d'un solide anisotrope, on est contraint de développer telle quelle la densité d'énergie en fonction du tenseur des déformations. Dans le cas particulier d'un solide isotrope, dans lequel les propriétés élastiques sont les mêmes dans toutes les directions, l'énergie ne dépend que des invariants du tenseur des déformations<sup>123</sup>.. Un développement de l'énergie en fonction des invariants principaux utilise le formalisme des constantes élastiques. L'utilisation d'autres invariants (comme les « invariants de Landau ») fait alors apparaître un autre jeu de constantes<sup>122</sup>. Par la suite, nous introduirons le développement proposé par Landau, puis celui proposé plus récemment par Hamilton *et al.*

L'équation caractéristique du tenseur des déformations s'écrit :

$$\det(\vec{S} - \Lambda \vec{I}) = -\Lambda^3 + I_S \Lambda^2 + II_S \Lambda + III_S = 0, \quad (3.16)$$



où  $I_S$ ,  $II_S$  et  $III_S$  sont les invariants principaux (respectivement d'ordres 1, 2 et 3) du tenseur des déformations  $\overline{\overline{S}}$ , définis par :

$$I_S = Tr(\overline{\overline{S}}), \quad (3.17)$$

$$II_S = \frac{1}{2} \left[ Tr(\overline{\overline{S}}^2) - Tr(\overline{\overline{S}})^2 \right], \quad (3.18)$$

$$III_S = det(\overline{\overline{S}}). \quad (3.19)$$

Le développement de la densité d'énergie potentielle élastique en fonction de ces invariants s'écrit au troisième ordre<sup>124</sup> :

$$E_P = \frac{1}{2} C_{11} I_S^2 + 2C_{44} II_S + \frac{C_{111}}{6} I_S^3 + 2C_{166} I_S II_S + 4C_{456} III_S + O(\overline{\overline{S}}^4), \quad (3.20)$$

où les constantes élastiques du deuxième et du troisième ordre sont notées en utilisant la convention de Voigt.

Les deux premiers termes sont du second ordre et modélisent respectivement la propagation linéaire des ondes longitudinales et transversales. Le troisième terme intervient dans la propagation non linéaire d'une onde longitudinale. Le quatrième est un terme de couplage quadratique entre deux ondes longitudinales et une onde transversale. Le dernier terme n'intervient pas dans la propagation non linéaire quadratique d'ondes planes.

On peut aussi exprimer les constantes élastiques en fonction des modules  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , introduits par Landau<sup>125</sup>:

$$E_P = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) I_S^2 + 2\mu II_S + \frac{(A + 3B + C)}{3} I_S^3 + \left( \frac{A}{2} + B \right) I_S II_S + A III_S + O(\overline{\overline{S}}^4). \quad (3.21)$$

Landau exprime la densité d'énergie élastique en fonction d'autres invariants,  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ , dont les expressions sont :

$$I_1 = Tr(\overline{\overline{S}}) = S_{ii} = I_S, \quad (3.22)$$

$$I_2 = Tr(\overline{\overline{S}}^2) = S_{ik} S_{ki} = 2II_S + I_S^2, \quad (3.23)$$

$$I_3 = Tr(\overline{\overline{S}}^3) = S_{ik} S_{kl} S_{li} = 3III_S + 3II_S I_S + I_S^3. \quad (3.24)$$

La densité d'énergie potentielle se met alors sous la forme :

$$E_P = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + \frac{A}{3} I_3 + B I_1 I_2 + \frac{C}{3} I_1^3 + O(\overline{\overline{S}}^4), \quad (3.25)$$

Ce que l'on peut retrouver à l'aide de l'équation (3.21).

Pour des ondes planes, l'équation de propagation dans un solide isotrope tirée de ces développements au troisième ordre est quadratique si l'onde est longitudinale, mais linéaire si elle est transversale. En effet, l'onde est transversale n'induit pas de mouvement de convection. Par ailleurs les transformations mises en jeu lors de sa propagation se font sans changement de volume.

Ainsi, pour rendre compte des effets non linéaires affectant la propagation des ondes transversales planes, il est nécessaire de développer la densité d'énergie au quatrième ordre.

En 1986, Zabolotskaya a tout d'abord développé la densité d'énergie potentielle élastique jusqu'à l'ordre quatre par rapport au tenseur des déformations. En utilisant les invariants de Landau, elle obtient<sup>126,127</sup> :

$$E_p = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + B I_1 I_2 + \frac{A}{3} I_3 + \frac{C}{3} I_1^3 + E I_1 I_3 + F I_1^2 I_2 + G I_2^2 + H I_1^4 + O\left(\overline{S}^5\right), \quad (3.26)$$

où  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , et  $H$  sont des constantes élastiques du 4<sup>ème</sup> ordre.

Ce développement peut être exprimé à l'aide des invariants principaux :

$$\begin{aligned} E_p = & \left( \frac{\lambda}{2} + \mu \right) I_s^2 + 2\mu II_s + (A + 2B) I_s II_s + \left( \frac{A}{3} + B + \frac{C}{3} \right) I_s^3 + A III_s \\ & + (E + 2F + 4G) I_s^2 II_s + 3E I_s III_s \\ & + 4G I_s^2 + (E + F + G + H) I_s^4 + O\left(\overline{S}^5\right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

En écrivant la densité d'énergie potentielle élastique d'un fluide parfait en fonction des invariants principaux, puis en identifiant les coefficients obtenus à ceux de l'équation ci-dessus, Hamilton *et al* montrent que les coefficient  $\mu$  et  $A$  n'interviennent pas dans la densité d'énergie d'un fluide parfait<sup>121</sup>. Ainsi les termes pondérés par ces deux coefficients dans l'énergie d'un solide peuvent être identifiés comme caractéristique de l'énergie de cisaillement.

### 3.3.3. Milieu quasi-incompressible

En toute rigueur, l'hypothèse d'incompressibilité revient à supposer que le coefficient de compressibilité adiabatique est nul ( $\chi = 0$ ). Ceci se traduit par un module d'élasticité infini. Les solides mous peuvent être considérés comme quasi-incompressible en raison de la grande

différence entre le module d'élasticité de compression  $K = \lambda + 2\mu$  et le module d'élasticité de cisaillement  $\mu$ . Pour le coefficient de Poisson, l'hypothèse de quasi-incompressibilité se traduit par :

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \cong 0,5. \quad (3.28)$$

Cette hypothèse est bien vérifiée pour les solides mous tels que les tissus biologiques, ou les gels d'Agar-Gélatine (AG) utilisés pour simuler leurs propriétés mécaniques. En effet, pour les concentrations en gélatine utilisées pour créer ces fantômes des tissus biologiques ( $\approx 10\%$  en volume de gélatine), la vitesse de propagation des ondes de compression et de cisaillement sont respectivement de l'ordre de 1500 m/s et de quelques m/s.

Récemment, le coefficient de Poisson dans des gels de PVA (Poly-Vinil Alcohol)<sup>xxxviii</sup> a été mesuré<sup>128</sup>. Pour l'ensemble des gels testés, les coefficients de Poisson obtenus restent égaux à  $\nu = 0,499 \pm 0,002$ .

En 2004, Hamilton, Ilinskii et Zabolotskaya ont proposé un nouveau développement de la densité d'énergie potentielle (3.26)<sup>121</sup>. Cette expression permet, pour un solide isotrope, de séparer les contributions dues au cisaillement de celles associées à la compression. En faisant ensuite l'approximation de milieu incompressible, ils obtiennent une expression de l'énergie mettant en jeu un nombre réduit de constantes. Plutôt que de développer  $E_P$  en fonction des invariants de Landau ( $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ ), ils utilisent  $I_2$ ,  $I_3$  et le troisième invariant principal  $III_G$  du tenseur des dilatations, dont les composantes  $G_{ik}$  s'écrivent :

$$G_{ik} = \frac{\partial x_m}{\partial a_i} \frac{\partial x_m}{\partial a_k}, \quad (3.29)$$

avec  $x_j = a_j + U_j$ , composante selon l'axe  $j$  de la position de la particule solide dans l'état déformé.

Introduire ce nouvel invariant d'ordre 3 est astucieux pour obtenir la densité d'énergie d'un solide incompressible, ne faisant intervenir que les déformations liées au cisaillement (sans variation de volume). En effet, comme il s'écrit<sup>129</sup> :

$$III_G = \det(\overline{\overline{G}}) = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2, \quad (3.30)$$

l'hypothèse d'incompressibilité le rend égal à 1.

<sup>xxxviii</sup> Ces gels sont eux aussi utilisés pour simuler les propriétés mécaniques des tissus biologiques. Par rapport aux gels à base de gélatine, ils présentent l'avantage de pouvoir être conservés très longtemps, dans l'eau, à température ambiante. Il sont obtenus par congélation d'une solution en phase liquide.

Il faut le substituer à  $I_1$  dans le développement de la densité d'énergie  $E_P$  (3.26) . En fonction des invariants principaux, son expression est la suivante<sup>125,129</sup> :

$$III_G = 1 + 2I_S - 4II_S + 8III_S. \quad (3.31)$$

En remplaçant les invariants principaux en fonction de ceux de Landau,  $III_G$  s'écrit :

$$III_G = 1 + 2I_1 + 2I_1^2 - 2I_2 + \frac{4}{3}I_1^3 - 4I_1I_2 + \frac{8}{3}I_3. \quad (3.32)$$

En introduisant alors l'hypothèse d'incompressibilité  $III_G = 1$ , on peut exprimer  $I_1$  en fonction de ses puissances et des autres invariants :

$$I_1 = -I_1^2 + I_2 - \frac{2}{3}I_1^3 + 2I_1I_2 - \frac{4}{3}I_3. \quad (3.33)$$

En remplaçant maintenant  $I_1$  dans le membre de droite l'expression (3.32) et en éliminant les termes d'ordre supérieur à la puissance quatrième du tenseur des déformations, on obtient finalement :

$$I_1 \cong I_2 - \frac{4}{3}I_3 + I_2^2. \quad (3.34)$$

Cette expression est ensuite reportée dans le développement de la densité d'énergie  $E_P$  :

$$E_P(\rho = \rho_0) = K_1 + K_2I_2 + K_3I_3 + K_4I_2^2, \quad (3.35)$$

avec  $K_1 = 0$ ,  $K_2 = \mu$ ,  $K_3 = \frac{A}{3}$  et  $K_4 = \frac{\lambda}{2} + B + G$ .

Les termes non nuls décrivent la non linéarité de la propagation des ondes de cisaillement dans les milieux isotropes incompressibles.

Hamilton *et al* mettent cette expression sous la forme<sup>121</sup> :

$$E_P = \mu I_2 + \frac{A}{3}I_3 + DI_2^2, \quad (3.36)$$

où  $D$  est une constante élastique du quatrième ordre qui n'apparaît que sous l'hypothèse d'incompressibilité. Elle est une combinaison linéaire de constantes élastiques du second, troisième et quatrième ordres qui sont mises en jeu dans la description de la propagation d'une onde longitudinale :

$$D = \frac{\lambda}{2} + B + G. \quad (3.37)$$

Cette approche permet de caractériser l'élasticité de cisaillement d'un solide incompressible au 4<sup>ème</sup> ordre, à l'aide de seulement trois constantes :  $\mu$ ,  $A$ , et  $D$ .

### 3.3.4. Equation de Burgers modifiée.

Afin de mettre en évidence les conséquences de la non linéarité cubique sur la propagation non linéaire d'une onde plane de cisaillement, nous reprenons ici les résultats parus dans l'article de Zabolotskaya *et al* paru en 2004<sup>130</sup>.

Considérons la propagation d'une onde plane de cisaillement dans un milieu incompressible absorbant. Nous supposons que la seule composante non nulle du champ de déplacement est :

$$\vec{U}(\vec{a}, t) = U_1(a_3, t) \vec{e}_x. \quad (3.38)$$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = \frac{\partial P_{13}}{\partial a_3} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial a_3}, \quad (3.39)$$

où  $P_{13}$  est la composante du tenseur de Piola-Kirchoff définie par :

$$P_{13} = \frac{\partial E_p}{\partial (\partial U_1 / \partial a_3)}. \quad (3.40)$$

$\tau_{13}$  est la composante du tenseur des efforts visqueux :

$$\tau_{13} = 2\eta \frac{\partial S_{13}}{\partial t} = \eta \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial U_1}{\partial a_3} \right). \quad (3.41)$$

En introduisant le développement (3.36) de l'énergie adaptée au cas d'un solide incompressible, il vient :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial a_3} \left[ \mu \frac{\partial U_1}{\partial a_3} + \left( \mu + \frac{A}{2} + D \right) \left( \frac{\partial U_1}{\partial a_3} \right)^3 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial U_1}{\partial a_3} \right) \right]. \quad (3.42)$$

L'équation de propagation s'écrit finalement :

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = V_T^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial a_3^2} \left[ 1 + 2\beta_T \left( \frac{\partial U_1}{\partial a_3} \right)^2 \right] + \frac{\eta}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial a_3^2} \right), \quad (3.43)$$

où  $V_T = \sqrt{\mu / \rho_0}$  est la vitesse de propagation des ondes de cisaillement en régime linéaire. Le

coefficient  $\beta_T = \frac{3}{2\mu} (\mu + A/2 + D)$  qui pondère le terme non linéaire de l'équation est appelé

coefficient de non linéarité de cisaillement.

Afin d'obtenir l'équation de Burgers modifiée pour les ondes de cisaillement planes, nous procédons comme au premier chapitre (cf. 1.1.2.1). Nous limitons le domaine de propagation vers la direction des  $z$  croissants (on pose  $z = a_3$ ).

L'introduction du temps retardé  $\tau$  et d'une coordonnée lente (décrivant les variations du déplacement dans le référentiel du temps retardé<sup>130</sup>),  $z_s = \varepsilon_T^2 z$ , permet de négliger les termes non linéaires pondérés par une puissance du nombre de Mach  $\varepsilon_T$  supérieure à 3 :

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial z \partial \tau} = \frac{\beta_T}{V_T^3} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} \left( \frac{\partial U_1}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{\eta}{2\rho_0 V_T^3} \frac{\partial^3 U_1}{\partial \tau^3}, \quad (3.44)$$

L'équation de Burgers modifiée est obtenue en introduisant la vitesse particulière  $v = \frac{\partial U_1}{\partial \tau}$  :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\beta_T}{V_T^3} v^2 \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\eta}{2\rho_0 V_T^3} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}. \quad (3.45)$$

Cette équation ressemble à l'équation de Burgers des ondes longitudinales (1.23), à la différence près que le terme non linéaire est ici de l'ordre du cube de la vitesse particulière.

La solution implicite de l'équation de Burgers modifiée sans dissipation ( $\eta = 0$ ), analogue de la solution de Poisson (1.27), est de la forme :

$$v(z, \tau) = f\left(\tau + \beta_T z v^2 / V_T^3\right). \quad (3.46)$$

Cette solution est valable jusqu'à la distance de choc, dont la définition dans le cas d'une onde de cisaillement est :

$$L_C^T = \frac{1}{\beta_T k \varepsilon_T^2}. \quad (3.47)$$

Elle fait intervenir le carré du nombre de Mach élastique  $\varepsilon_T$  associé à l'onde de cisaillement. L'action de la non linéarité s'interprète au premier abord de la même façon que pour les ondes longitudinales. La vitesse de propagation n'est plus constante, elle est fonction de la vitesse particulière. Son expression est :

$$V_T(v) = V_T \left( 1 + \frac{\beta_T v^2}{V_T^3} \right). \quad (3.48)$$

Cependant, à la différence des ondes longitudinales (équation 1.25), en raison de la dépendance quadratique de la vitesse de propagation vis à vis de la vitesse particulière, les minima de vitesse particulière se propagent aussi rapidement que les maxima. La forme de l'onde se distord au cours de la propagation de façon symétrique par rapport à l'axe  $v = 0$ . L'onde de choc n'est donc plus celle observée dans le cas des ondes longitudinales : elle n'a plus une forme en « N ». La solution (3.46), dans le cas particulier d'une onde sinusoïdale de fréquence  $f_0 = 100$  Hz, est représentée sur la figure 3.12. Le module du spectre montre que seules les harmoniques impaires ( $3f_0, 5f_0 \dots$ ) sont créées.

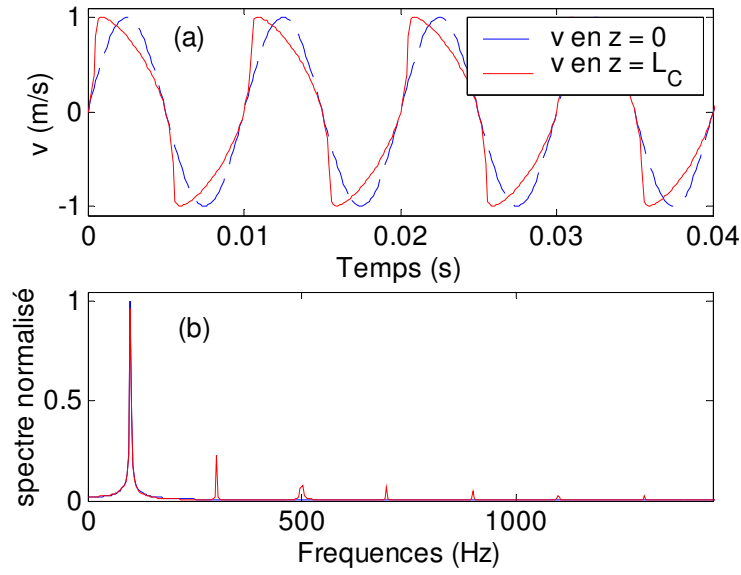


Figure 3.12 : Illustration de la distorsion de la forme d'une onde transversale plane et sinusoïdale induite par la propagation non linéaire : (a) Vitesse particulaire en fonction du temps. (b) Module du spectre correspondant.

L'évolution en fonction de la distance de propagation des trois premières composantes, déduites par filtrage de la solution implicite sans dissipation, est représentée sur la figure 3.13. Nous observons bien la génération en cascade des harmoniques impaires.

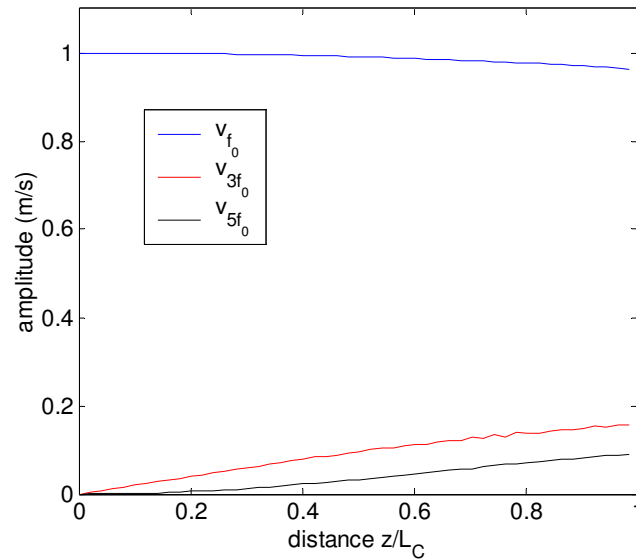


Figure 3.13 : Evolution en fonction de la distance de l'amplitude des composantes à la fréquence fondamentale (en bleu), à la troisième harmonique (en rouge) et à la cinquième harmonique (en noir).

Au cours de la thèse de Jean-Luc Gennisson<sup>131</sup>, le coefficient de non linéarité  $\beta_T$  a été mesuré dans un gel à l'aide d'une méthode basée sur la comparaison des résultats expérimentaux

(dont le dispositif expérimental est décrit lors de la partie 3.5) de la formation d'une onde de choc avec les résultats d'une simulation numérique de l'équation de Burgers modifiée (3.45). Une valeur du coefficient a été déduite sans faire l'hypothèse d'incompressibilité<sup>132</sup>. Plus récemment, X. Jacob *et al* ont étudié expérimentalement l'interaction d'ondes de cisaillement de fréquence  $f_1$  et  $f_2$ . Ils ont mis en évidence expérimentalement qu'elle se traduit par la génération d'ondes aux fréquences  $2f_1 \pm f_2$  et  $f_1 \pm 2f_2$ <sup>133</sup>.

### 3.4. Mesure du coefficient de Landau A par acoustoélasticité

L'acoustoélasticité repose sur la variation de la vitesse de propagation d'une onde de faible amplitude lorsqu'un solide est soumis à une contrainte uni-axiale ou hydrostatique. La théorie a été introduite par Hughes et Kelly en 1953<sup>134</sup>. La méthode la plus couramment utilisée pour la mesure des constantes élastiques du troisième ordre dans un solide est basée sur ce principe<sup>135,136, 137, 138, 139</sup>. Elle a été appliquée avec succès à la mesure des constantes élastiques du troisième d'ordre de matériaux poreux<sup>140</sup> ou de roches<sup>141</sup>. Cette méthode permet aussi, dans le cas où les constantes élastiques sont connues, d'estimer les contraintes résiduelles dans le matériau<sup>142</sup>.

Dans les gels, elle a d'ores et déjà été utilisée par Stefan Catheline et Jean-Luc Gennisson pour mesurer les modules élastiques de Landau ( $A$  et  $B$ ) d'un gel d'Agar-gélatine<sup>143</sup>. Les ondes de cisaillements étaient alors générées à l'aide du palpeur acoustique 1D, qui ne permet pas de s'affranchir des phénomènes de diffraction. De plus l'hypothèse d'incompressibilité n'était alors pas formulée. Or sans cette hypothèse, l'élasticité non linéaire des ondes transverses fait intervenir des modules élastiques relatifs aux ondes de compression,  $\lambda$ ,  $B$  et  $C$ , de l'ordre du GPa, bien plus élevé que l'ordre de grandeur des modules relatifs aux ondes de cisaillement  $A$  et  $\mu$  (kPa). Il faut donc mesurer  $\lambda$ ,  $B$  et  $C$  avec une très bonne précision afin d'extraire le module de Landau  $A$  avec une incertitude raisonnable. Cette expérience est ici revisitée en mettant à profit cette hypothèse d'incompressibilité. Nous montrons que dans ce cas les variations des vitesses de phase des ondes de cisaillement sous l'action d'une contrainte uni-axiale ne sont fonction que du module de Landau  $A$ . La mesure de ces variations selon trois configurations permet alors une estimation plus fiable de  $A$ . Par ailleurs, les ondes de cisaillement sont ici engendrées à l'aide de la force de radiation. Cette méthode de génération permet de réduire les artefacts dus à la diffraction, puisque l'onde de cisaillement est plane dans le plan d'imagerie.



Nous considérons ici que les ondes planes de cisaillement se propagent dans un solide mou isotrope. Nous utilisons donc l'expression (3.36) de la densité d'énergie pour un milieu incompressible.

### 3.4.1. Acoustoélasticité dans les milieux isotropes incompressibles

La théorie de l'acoustoélasticité considère la propagation d'ondes de faibles amplitudes, dans un milieu où la non linéarité ne s'exprime que par l'effet de la contrainte appliquée sur le milieu. Il est donc d'usage de négliger les termes d'ordre supérieur à trois dans l'expression de la densité d'énergie  $E_P$  de l'onde seule. Cette approximation est aussi faite dans le cas d'une onde de cisaillement : sa propagation est supposée linéaire<sup>xxxix</sup>.

En fonction du gradient des déplacement, les invariants de Landau s'écrivent :

$$I_2 = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial U_i}{\partial a_k} + \frac{\partial U_k}{\partial a_i} \right)^2 + \frac{\partial U_k}{\partial a_i} \frac{\partial U_l}{\partial a_i} \frac{\partial U_l}{\partial a_k}, \quad (3.49)$$

$$I_3 = \frac{3}{4} \frac{\partial U_k}{\partial a_i} \frac{\partial U_l}{\partial a_i} \frac{\partial U_l}{\partial a_i} + \frac{1}{4} \frac{\partial U_i}{\partial a_k} \frac{\partial U_k}{\partial a_l} \frac{\partial U_l}{\partial a_i}. \quad (3.50)$$

La densité d'énergie (3.36), limitée au troisième ordre, s'écrit alors :

$$E_P = \frac{\mu}{4} \left( \frac{\partial U_i}{\partial a_k} + \frac{\partial U_k}{\partial a_i} \right)^2 + \left( \mu + \frac{A}{12} \right) \frac{\partial U_k}{\partial a_i} \frac{\partial U_l}{\partial a_i} \frac{\partial U_l}{\partial a_k} + \frac{A}{4} \frac{\partial U_i}{\partial a_k} \frac{\partial U_k}{\partial a_l} \frac{\partial U_l}{\partial a_i}. \quad (3.51)$$

En reportant dans l'expression (3.15) du tenseur de Piola-Kirchoff, le tenseur des contraintes devient :

$$P_{ik} = \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial a_k} + \frac{\partial U_k}{\partial a_i} \right) + \left( \mu + \frac{A}{4} \right) \left( \frac{\partial U_l}{\partial a_i} \frac{\partial U_l}{\partial a_k} + \frac{\partial U_i}{\partial a_l} \frac{\partial U_k}{\partial a_l} + \frac{\partial U_l}{\partial a_k} \frac{\partial U_i}{\partial a_l} \right) + \frac{A}{4} \frac{\partial U_k}{\partial a_l} \frac{\partial U_l}{\partial a_i}, \quad (3.52)$$

ce qui conduit à l'équation du mouvement de la particule solide suivante :

<sup>xxxix</sup> L'amplitude de la vitesse particulaire de l'onde de cisaillement générée par la force de radiation est de l'ordre de 5 mm/s. En supposant que  $V_T = 2,5$  m/s, et que le coefficient de non linéarité  $\beta_T$  de l'ordre de 5, la distance de choc est alors de l'ordre de la centaine de mètres. Compte-tenu de la forte atténuation des ondes de cisaillement dans les solides mous ( $\alpha \sim 10$  Np/m), l'hypothèse de linéarité de la propagation semble raisonnable.

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial a_k} = \mu \left( \frac{\partial^2 U_i}{\partial a_k^2} + \frac{\partial^2 U_k}{\partial a_i \partial a_k} \right) \\ + \left( \mu + \frac{A}{4} \right) \left( \frac{\partial^2 U_l}{\partial a_i \partial a_k} \frac{\partial U_l}{\partial a_k} + \frac{\partial U_l}{\partial a_i} \frac{\partial^2 U_l}{\partial a_k^2} + \frac{\partial^2 U_k}{\partial a_l \partial a_k} \frac{\partial U_i}{\partial a_l} + \frac{\partial^2 U_l}{\partial a_k^2} \frac{\partial U_i}{\partial a_l} + 2 \frac{\partial U_k}{\partial a_l} \frac{\partial^2 U_i}{\partial a_k \partial a_l} \right) \\ + \frac{A}{4} \left( \frac{\partial^2 U_k}{\partial a_k \partial a_l} \frac{\partial U_l}{\partial a_i} + \frac{\partial U_k}{\partial a_l} \frac{\partial^2 U_l}{\partial a_k \partial a_i} \right). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Comme une contrainte uni-axiale est appliquée au solide, deux déplacements sont mis en jeu : le déplacement statique  $\vec{U}^S$  provoqué par l'application de la contrainte et le déplacement dynamique  $\vec{U}^D$  associé à la propagation de l'onde. Le déplacement total de la particule est donc la somme du déplacement statique et du déplacement dynamique :

$$\vec{U}^{TOT} = \vec{U}^D + \vec{U}^S. \quad (3.54)$$

Nous supposons que la propagation de l'onde est linéaire, aussi les termes faisant intervenir le produit de dérivées spatiales du déplacement dynamique sont négligés. Par ailleurs, la déformation statique est supposée uniforme (la dérivée spatiale seconde du déplacement statique est donc nulle). Ces hypothèses conduisent à l'équation d'onde suivante:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 U_i^D}{\partial t^2} = \mu \left( \frac{\partial^2 U_i^D}{\partial a_k^2} + \frac{\partial^2 U_k^D}{\partial a_i \partial a_k} \right) \\ + \left( \mu + \frac{A}{4} \right) \left( \frac{\partial^2 U_l^D}{\partial a_i \partial a_k} \frac{\partial U_l^S}{\partial a_k} + \frac{\partial U_l^S}{\partial a_i} \frac{\partial^2 U_l^D}{\partial a_k^2} + \frac{\partial^2 U_k^D}{\partial a_l \partial a_k} \frac{\partial U_i^S}{\partial a_l} + \frac{\partial^2 U_l^D}{\partial a_k^2} \frac{\partial U_i^S}{\partial a_l} + 2 \frac{\partial U_k^S}{\partial a_l} \frac{\partial^2 U_i^D}{\partial a_k \partial a_l} \right) \\ + \frac{A}{4} \left( \frac{\partial^2 U_k^D}{\partial a_k \partial a_l} \frac{\partial U_l^S}{\partial a_i} + \frac{\partial U_k^S}{\partial a_l} \frac{\partial^2 U_l^D}{\partial a_k \partial a_i} \right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Soit une onde plane se propageant selon l'axe  $a_2$  dont le mouvement est restreint à l'axe  $a_1$  (figure 3.14.a). Le déplacement induit par l'onde est alors noté  $U_1^D(a_2, t)$ . Ainsi l'indice 1 indique la direction de la polarisation de l'onde de cisaillement, qui coïncide avec la direction vers laquelle le train d'ondes, source de la force de radiation, se propage. Le second indice correspond à la direction de propagation de l'onde de cisaillement, qui est donc la direction parallèle à la largeur de la barrette échographique. Si nous supposons que la contrainte uni-axiale est orientée selon l'axe  $a_2$ , il vient :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_1^D}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 U_1^D}{\partial a_2^2} + \left( 2\mu + \frac{A}{2} \right) \frac{\partial^2 U_1^D}{\partial a_2^2} \left( \frac{\partial U_1^S}{\partial a_1} + \frac{\partial U_2^S}{\partial a_2} \right). \quad (3.56)$$

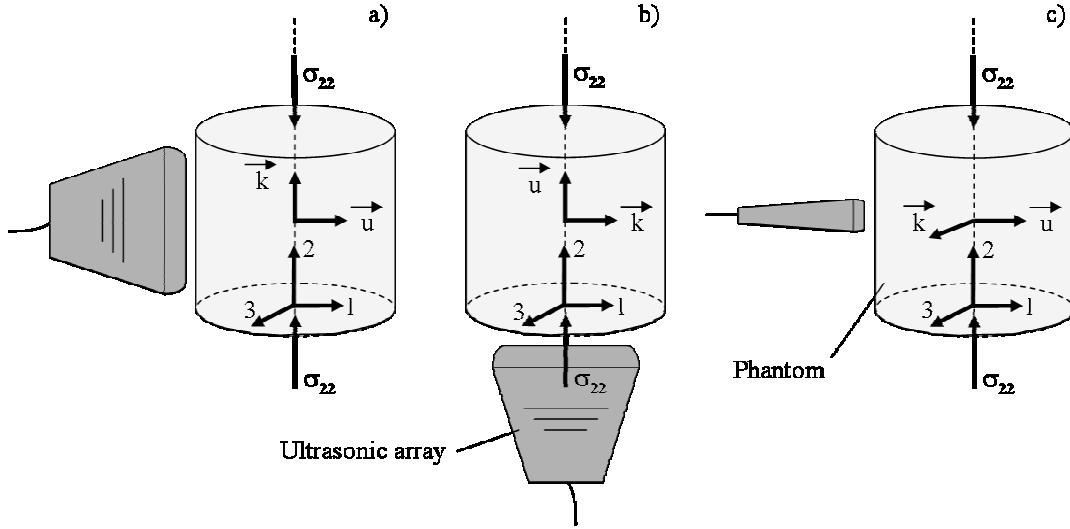


Figure 3.14 : Schéma représentant les trois configurations utilisées pour la génération (grâce à la force de radiation) et l'imagerie (grâce au dispositif ultra-rapide) de la propagation des ondes de cisaillement dans un gel auquel une contrainte uni-axiale ( $\sigma_{22}$ ) est appliquée. Du fait de la symétrie cylindrique de l'échantillon, les couples d'indices sont : [12] (ou [32]), [21] (ou [23]) et [13] (ou [31]), pour les configurations a), b), c) respectivement.

Le dispositif d'imagerie fournit le mouvement de la particule par rapport à son état statiquement déformé. Il faut donc changer de système de coordonnées, en passant du repère lié la position initiale avant l'application de la contrainte à celui lié à la position dans l'état déformé. Nous supposons que la contrainte est répartie sur une surface grande devant les dimensions de l'échantillon solide, ce qui permet de la supposer uniforme<sup>144</sup>.

Du fait de l'application de la contrainte, la particule initialement en  $\vec{a}$  se trouve déplacée vers une nouvelle position d'équilibre :  $\vec{x} = \vec{a} + \vec{U}^S$ . La position de la particule au cours du passage de l'onde est alors :  $\vec{y} = \vec{x} + \vec{U}^D$ .

En introduisant ce changement de variable, et en négligeant les termes d'ordre supérieur à deux (c'est-à-dire les termes d'ordre trois dans l'expression de la densité d'énergie), il vient :

$$\frac{\partial U_i^D}{\partial a_k^2} \equiv \frac{\partial^2 U_i^D}{\partial x_k^2} \left( 1 + 2 \frac{\partial U_k^S}{\partial x_k} \right) \text{ et } \frac{\partial^2 U_k^D}{\partial a_i \partial a_k} \equiv \frac{\partial^2 U_k^D}{\partial x_i \partial x_k}. \quad (3.57)$$

Si l'on choisit une onde plane polarisée selon l'axe 1 et se propageant selon la direction  $a_2$ , l'équation d'onde (3.56) dans le nouveau système de coordonnées, de laquelle le déplacement  $U_1^D(x_2, t)$  est solution s'écrit alors :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_1^D}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U_1^D}{\partial x_2^2} \left[ \mu + 2\mu \left( \frac{\partial U_1^S}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial U_2^S}{\partial x_2} \right) + \frac{A}{2} \left( \frac{\partial U_1^S}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2^S}{\partial x_2} \right) \right]. \quad (3.58)$$

Enfin, nous utilisons la loi de Hooke afin de faire apparaître explicitement l'action de la contrainte. L'hypothèse d'incompressibilité est de nouveau introduite à travers le coefficient de Poisson  $\nu$ , qui vaut alors 0,5. Les dérivées spatiales du déplacement statique s'expriment alors par :

$$\frac{\partial U_2^S}{\partial x_2} = -\frac{\sigma_{22}}{E} \approx -\frac{\sigma_{22}}{3\mu} \text{ et } \frac{\partial U_1^S}{\partial x_1} = \frac{\partial U_3^S}{\partial x_3} = \frac{\nu\sigma_{22}}{E} \approx \frac{\sigma_{22}}{6\mu}, \quad (3.59)$$

où  $E$  est le module d'Young, qui est égal à  $3\mu$  dans le cas d'un milieu incompressible (équation 3.7).

Finalement l'équation de propagation pour une onde de cisaillement selon l'axe  $a_2$  et polarisée suivant l'axe  $a_1$  conduit à une célérité  $V_{T12}$  telle que :

$$\rho_0 V_{T12}^2 = \mu_{[12]}^{eff} = \mu - \sigma_{22} \left( 1 + \frac{A}{12\mu} \right). \quad (3.60)$$

Nous voyons donc l'effet de la contrainte. Celle-ci modifie l'élasticité linéaire effective (le module de cisaillement  $\mu$ ) vue par l'onde de cisaillement. En conséquence, cette dernière se propage avec une célérité différente, qui va dépendre de la contrainte appliquée mais aussi des valeurs du couple  $(\mu, A)$ . Cette célérité varie linéairement avec la contrainte appliquée, du moins tant qu'elle reste inférieure à la limite d'élasticité du gel.

En procédant de la même façon pour les autres couples d'indices (polarisation/direction de propagation) possibles (cf. figure 3.14), on obtient pour les indices [21] ou [23] :

$$\rho_0 V_{T21}^2 = \mu_{[21]}^{eff} = \mu - \sigma_{22} \frac{A}{12\mu}, \quad (3.61)$$

et pour le dernier cas (indices [13] ou [31]) :

$$\rho_0 V_{T13}^2 = \mu_{[31]}^{eff} = \mu + \sigma_{22} \left( 1 + \frac{A}{6\mu} \right). \quad (3.62)$$

Nous avons donc calculé les variations de la vitesse de phase pour trois ondes planes de cisaillement se propageant dans un milieu incompressible soumis à une contrainte uni-axiale. Le milieu initialement isotrope devient anisotrope et les modules effectifs  $\mu^{eff}$  de cisaillement varient linéairement en fonction de l'amplitude de la contrainte. Le signe et l'amplitude de ces variations ne sont pas les mêmes suivant les directions de propagation et de polarisation. A partir de mesures de célérité pour différentes amplitudes de la contrainte appliquée, nous allons mesurer le coefficient élastique de Landau  $A$ .

### 3.4.2. Echantillons

L'analyse de la section 3.4.1 est appliquée à la mesure du coefficient élastique de Landau  $A$  de gels simulant les propriétés élastiques des tissus biologiques. Les mesures sont effectuées sur huit gels différents dont les caractéristiques sont reportées dans le tableau 3.1. Il s'agit de gels de forme cylindrique, de diamètre  $d$  et de hauteur  $h$ . Cinq d'entre eux sont faits d'Agar-Gélatine (AG) dont la concentration en gélatine est variable et trois sont faits de PVA dont le traitement thermique (cycle de congélation/décongélation), qui en détermine les propriétés élastiques, est différent. Un gel de PVA présente un module de cisaillement d'autant plus élevé que le nombre de cycle congélation/décongélation est important.

Echantillons d'Agar-Gélatine	Pourcentage de gélatine	Diamètre $d$ , hauteur $h$
Gel AG 1	5%	$d = 12,5 \text{ cm}$ $h = 15 \text{ cm}$
Gel AG 2	7%	$d = 12 \text{ cm}$ , $h = 15 \text{ cm}$
Gel AG 3	8,5%	Idem
Gel AG 4	10%	Idem
Gel AG 5	15%	$d = 12,5 \text{ cm}$ $h = 15 \text{ cm}$
Echantillons de PVA.	Nombre de cycles de congélation/décongélation	Diamètre $d$ , hauteur $h$
Gel PVA. 1	2	$d = 12,5 \text{ cm}$ $h = 15 \text{ cm}$
Gel PVA. 2	4	idem
Gel PVA. 3	5	idem

Tableau 3.1 : Propriétés de échantillons de solides mous.

Les concentrations en gélatine sont de 5%, 7%, 8,5% 10% et 15%. L'Agar, dont la concentration en volume est fixe (3%) n'est pas fondu. Ainsi il est présent dans le gel sous forme de petits agrégats, qui jouent le rôle de diffuseurs, nécessaires à la technique d'imagerie utilisée. Leur contribution à l'élasticité du gel n'est donc pas étudiée.

Les gels de PVA sont constitués de 10% de PVA (PolyVinyl Alcohol hydrolyzed) dissous dans l'eau. La solution est chauffée au bain marie à 80°C. Les diffuseurs sont obtenus par l'ajout de 3% de Sigmacell. Pour faire varier l'élasticité de ces gels, il suffit de leur faire subir un nombre différent de cycles de congélation/décongélation<sup>145,146</sup>.

### 3.4.3. Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est représenté sur la figure 3.15. Le gel est posé sur un support sur lequel est maintenu l'une des barrettes échographiques. Une cuve de plastique, placée au dessus du gel, est remplie d'un volume d'eau variable en fonction de la contrainte à appliquer. La valeur maximale de la contrainte est choisie de façon à éviter la rupture de l'échantillon par écrasement. La cuve de plastique est guidée par un support afin de garantir la direction de la contrainte selon l'axe vertical. Afin de réduire les effets de friction susceptibles de limiter l'expansion horizontale du gel, du gel couplant « échographique » est appliqué sur les surfaces du gel en contact avec les supports.



Figure 3.15 : Dispositif expérimental.

La barrette échographique, de fréquence centrale  $f_0 = 4,3$  MHz, composée de 128 éléments piézoélectriques séparés de  $330\text{ }\mu\text{m}$ , est placée selon l'une des trois positions correspondant aux trois équations (3.60, 3.61 et 3.62) (cf. figure 3.14). Le faisceau ultrasonore est donc deux fois perpendiculaire à l'axe de la contrainte uni-axiale et une fois parallèle à celle-ci. Chacun des éléments de la barrette possède son propre dispositif d'émission/réception. L'amplitude d'émission est de 80 V crête à crête. L'ensemble permet de réaliser à la fois la poussée des tissus et l'imagerie de l'onde de cisaillement résultante. Le protocole expérimental de génération et d'imagerie de l'onde de cisaillement est représenté sur la figure 3.16. Il se décompose en trois étapes. Le train d'ondes ultrasonore, de fréquence centrale  $f_0 = 4,3$  MHz et de durée  $\Theta = 500\text{ }\mu\text{s}$ , est tout d'abord focalisé successivement à quatre profondeurs différentes ( $z = 40, 45, 50$  et  $55\text{ mm}$ ). Le solide mou est en conséquence poussé localement dans la direction du faisceau ultrasonore puis relâché. Une onde de cisaillement est créée. L'intervalle de temps séparant l'émission des quatre trains d'ondes est tel que la vitesse de

déplacement de la source est supérieure à la vitesse de propagation des ondes de cisaillement dans le milieu, afin de créer un front d'onde quasi-plan dans le plan de la barrette (« mode supersonique », cf. 3.2.2.5).

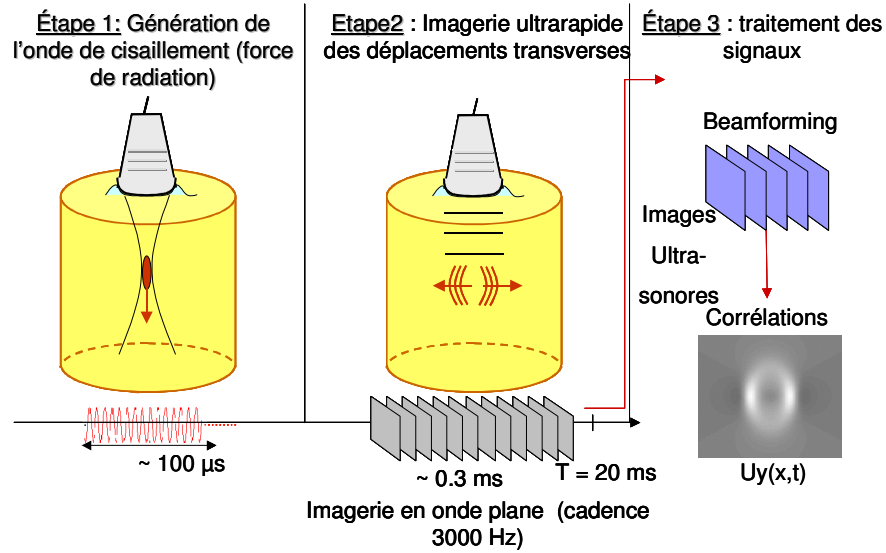


Figure 3.16 : Différentes étapes de l'expérience : génération de l'onde de cisaillement (étape 1), imagerie des déplacement transverses (étape 2), traitement des signaux (étape 3).

A la fin de cette étape de poussée, l'échographe bascule en mode d'imagerie ultrarapide, déjà décrit (cf. 3.2.2.1).

Le résultat est une image du déplacement associé à l'onde de cisaillement (figure 3.17).

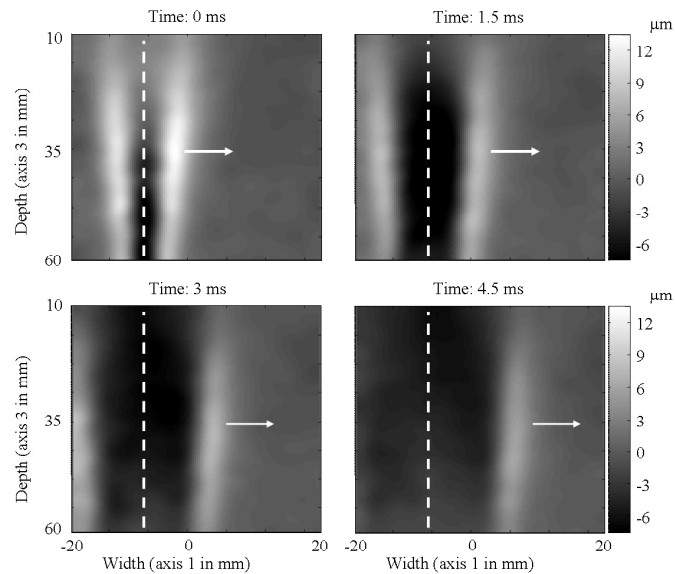


Figure 3.17 : Images des déplacements à différents instants après la poussée provoquée par la force de radiation. La ligne en pointillés représente l'axe du faisceau ultrasonore (i.e. la polarisation de l'onde de cisaillement). La flèche représente la direction de propagation de l'onde de cisaillement dans le plan de la barrette.

### 3.4.4. Problème inverse

Un algorithme est appliqué afin d'obtenir une cartographie du module de cisaillement à partir du champ de vitesse. Bien qu'il s'agisse d'une approche simple, il est appelé « problème inverse »<sup>XL,147</sup>.

Le milieu est supposé incompressible, linéaire, homogène et purement élastique. Le champ de vitesse satisfait donc l'équation :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = \mu \Delta v_i. \quad (3.63)$$

Supposons que la barrette échographique soit placée dans un plan  $(x, z)$ , où  $z$  désigne la direction du faisceau ultrasonore et  $x$  l'axe perpendiculaire.

En pratique, l'algorithme d'intercorrelation ne fournit une estimation que de la composante de l'onde de cisaillement qui est parallèle à l'axe du faisceau ultrasonore. Seule la composante de la vitesse selon l'axe  $z$ ,  $v_z$ , est donc exploitée.

Comme l'image est faite dans le plan  $(x, z)$ , nous ne possédons aucune information sur les variations spatiales du champ de vitesse dans la direction  $y$  perpendiculaire à la largeur de la barrette, aussi appelée direction d'élévation. Il est donc supposé que les variations spatiales du champ de vitesse sont faibles dans ce plan :

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \ll \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}. \quad (3.64)$$

Cette hypothèse, assez forte, est une des principales sources d'erreur de cette méthode. Elle est couramment utilisée dans les méthodes ultrasonores d'élastographie. En raison de la non contribution du champ réfléchi à la formation de l'image, elle semble *a priori* mieux vérifiée en élastographie impulsienne que pour les autres méthodes d'élastographie (statique ou harmonique)<sup>109</sup>.

Sous cette hypothèse, l'équation de propagation pour la composante suivant l'axe  $z$  s'écrit :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} = \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \right). \quad (3.65)$$

---

<sup>XL</sup> La résolution du problème inverse passe en général par une étape initiale de modélisation du phénomène, dite « problème direct », qui décrit comment les paramètres du modèle se traduisent en effets observables expérimentalement. Ensuite, à partir des mesures obtenues sur le phénomène réel, la démarche va consister à estimer au mieux les paramètres qui permettent de rendre compte de ces mesures. Cette résolution peut se faire numériquement ou de façon analytique. La résolution mathématique est rendue difficile par le fait que les problèmes inverses sont en général des problèmes mal posés, c'est-à-dire que les seules observations expérimentales ne suffisent pas à déterminer parfaitement tous les paramètres du modèle. Il est donc nécessaire d'ajouter des hypothèses qui permettent de réduire l'espace des possibles de façon à aboutir à une solution unique<sup>147</sup>.



Le module de cisaillement est alors proportionnel, à tout instant, au rapport de la dérivée seconde de la vitesse et la forme approchée du Laplacien :

$$\mu(x, z) = \rho_0 \frac{\frac{\partial^2 v_z(x, z, t)}{\partial t^2}}{\left( \frac{\partial^2 v_z(x, z, t)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z(x, z, t)}{\partial x^2} \right)}. \quad (3.66)$$

Ce traitement n'est valable que dans un milieu libre et il ne prend pas en compte la présence de sources mécaniques dans le milieu. Aussi nous ne tenons pas compte de la zone de poussée pour l'estimation du module de cisaillement. A titre d'exemple, une carte de la célérité obtenue dans un gel de PVA (PVA 1, cf. tableau 3.1 ) est représentée sur la figure 3.18. La zone où se produit la poussée est encadrée en trait plein noir. Le domaine sur lequel la valeur de la vitesse de propagation est moyennée est représenté en pointillés.

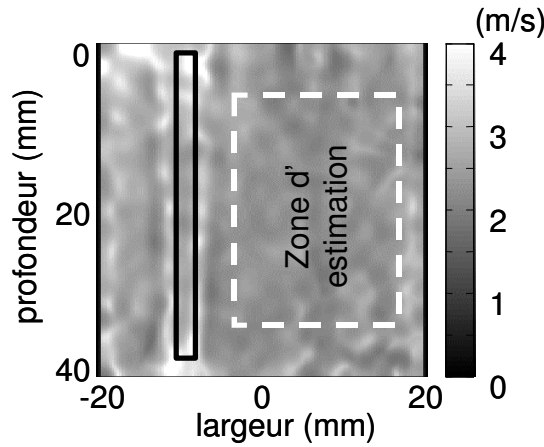


Figure 3.18 : Carte de la célérité des ondes de cisaillement reconstruite à partir de l'imagerie de la propagation d'une onde de cisaillement générée par la force de radiation dans le gel de PVA 1.

### 3.3.5. Résultats

Les variations du module de cisaillement en fonction de la contrainte appliquée sont rassemblées sur la figure 3.19. Le module de cisaillement effectif de l'onde polarisée suivant l'axe 2 et qui se propage suivant l'axe 1, (équation 3.61) est représenté en rouge. Celui de l'onde polarisée suivant l'axe 1 et qui se propage selon l'axe 2 (équation 3.60) est représenté en noir. Enfin, celui associé à l'onde polarisée selon l'axe 1 se propageant selon l'axe 3 (équation 3.62) est représenté en bleu. Les droites sont obtenues par régression linéaire au sens des moindres carrés.

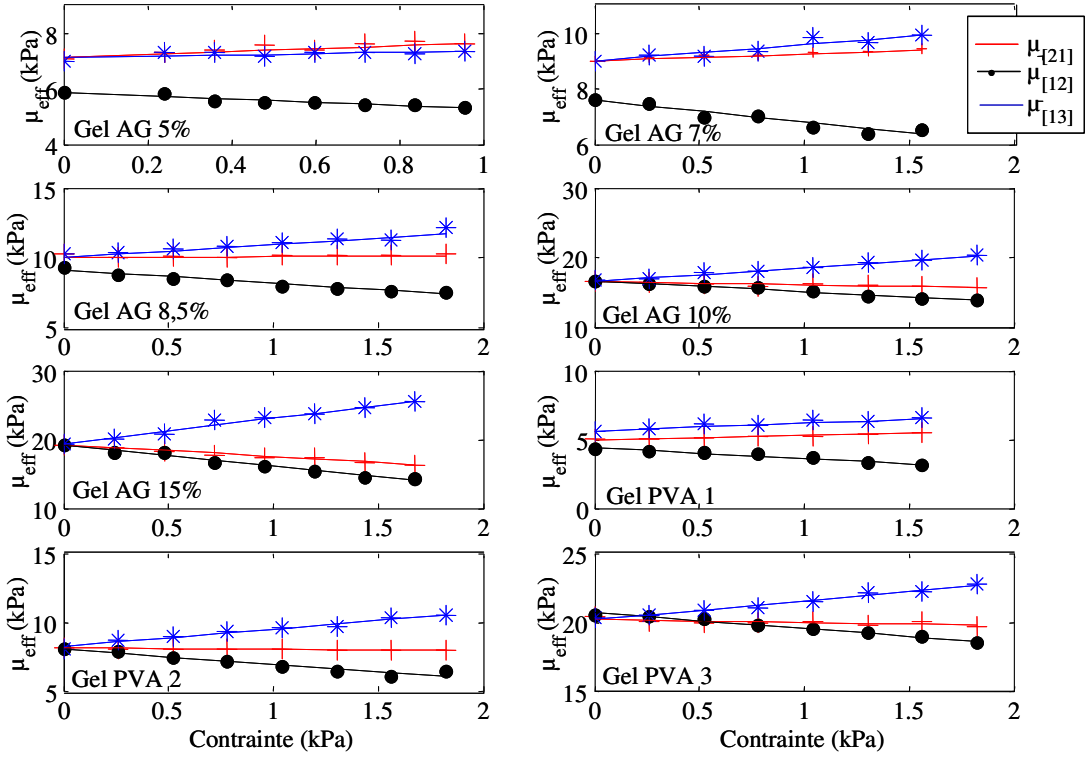


Figure 3.19 : Variations du module de cisaillement effectif  $\mu_{\text{eff}}$  en fonction de la contrainte selon les trois directions [21], [12] et [13]. Les étoiles (\*), les croix (+) et les points marquent les résultats expérimentaux. Les droites en trait plein sont obtenues par régression linéaire au sens des moindres carrés.

Le module de cisaillement à contrainte nulle est pris comme la valeur moyenne des trois mesures (cf. tableau 3.2). Les variations du module de cisaillement semblent bien linéaires en fonction de la contrainte appliquée. On observe une anisotropie induite par l'application de la contrainte. Les variations du module effectif de cisaillement dépendent de la direction considérée ainsi que du matériau. Dans le plan [13], l'application de la contrainte conduit pour tous les échantillons à une augmentation du module de cisaillement. Dans le plan [12], la tendance inverse est observée, le module décroît sous l'action de la contrainte. La variation du module de cisaillement dans le plan [21] n'a pas le même signe pour tous les échantillons. D'après l'équation 3.61, le sens de variation du module de cisaillement dans ce plan est directement relié au signe du module de Landau. Ce dernier change donc de signe selon les échantillons.

Le module de Landau est estimé à partir de la valeur du coefficient directeur  $p$  de la droite obtenue par régression linéaire, et du module de cisaillement  $\mu$  à contrainte nulle, selon les relations :

$$A_{13} = 6\mu p_{13} - 6\mu , \quad (3.67.a)$$

$$A_{12} = -12\mu p_{12} - 12\mu , \quad (3.67.b)$$

$$A_{21} = -12\mu p_{21} . \quad (3.67.c)$$

Les valeurs du module de cisaillement  $\mu$  et celles du module de Landau  $A$  mesurés selon les trois axes sont reportées dans le tableau 3.2. La valeur  $A$  est calculée en prenant la valeur moyenne des trois valeurs fournit par les relations (3.67). L'écart type, calculé à partir des trois valeurs, reste inférieur à 28% sur l'ensemble des échantillons testés, excepté pour le gel PVA 1.

Echantillons	Module de cisaillement $\mu$ (kPa)	Module de Landau A (kPa)			
		$A_{21}$	$A_{12}$	$A_{13}$	$A$
Gel AG 5%	$6,6 \pm 0,6$	-48,6	-35,0	-29,4	$-37,7 \pm 9,8$
Gel AG 7%	$8,5 \pm 0,8$	-25,6	-21,5	-21,0	$-22,7 \pm 2,5$
Gel AG 8,5%	$9,9 \pm 0,5$	-5,9	-7,1	-4,8	$-5,9 \pm 1,2$
Gel AG 10%	$16,6 \pm 0,1$	91,8	109,8	102,8	$101,4 \pm 9,0$
Gel AG 15%	$19,2 \pm 0,1$	404,1	466,4	312,8	$394,4 \pm 77,2$
Gel PVA 1	$4,1 \pm 0,1$	-15,4	-25,8	-11,2	$-17,5 \pm 7,5$
Gel PVA 2	$8,1 \pm 0,1$	9,7	10,7	12,6	$11,0 \pm 1,4$
Gel PVA 3	$20,4 \pm 0,1$	56,3	31,8	42,8	$43,6,0 \pm 12,2$

Tableau 3.2 : Résultats obtenus pour les différents échantillons testés.

Pour tous les échantillons, le module de Landau est de l'ordre du kPa. Ceci est en accord avec les résultats obtenus précédemment<sup>131</sup>. L'ordre de grandeur des constantes élastiques du troisième ordre dans les solides classiques est considérablement plus élevé (GPa)<sup>148,149</sup>.

Lorsque le gel devient plus dur, soit par augmentation de la concentration en gélatine dans le cas de l'Agar-Gélatine, soit par un plus grand nombre de cycles congélation/décongélation dans le cas du PVA, les deux modules de cisaillement ( $\mu$ ,  $A$ ) tendent à croître. Ainsi, la valeur de  $A$ , qui pour un gel « mou » est négative, change de signe lorsque le gel « durcit ». Ceci a pour conséquence un changement de signe des variations du module effectif de cisaillement dans le plan [21]. La cause de ce changement de signe du coefficient de Landau  $A$  en fonction de la concentration en gélatine ou du nombre de cycles de congélation/décongélation du PVA est brièvement discutée par la suite.

### **3.4.6. Discussion**

Ces expériences nous ont permis d'estimer le module de Landau  $A$  à partir des mesures du module effectif de cisaillement selon les trois axes. L'écart type standard n'est pas excellent, mais acceptable compte-tenu de la difficulté de contrôler la verticalité de l'axe de la contrainte. Par ailleurs, la gamme de contraintes est assez réduite, et les variations qu'elle induit ne sont pas toujours suffisantes pour une mesure précise. Ceci est particulièrement vrai pour les gels les plus mous (module de cisaillement faible), comme le Gel d'Agar-Gélatine à 5% ou le gel de PVA 1 (deux cycles de congélation/décongélation). En effet, pour ces deux gels, non seulement le module de cisaillement varie peu sous l'action d'une contrainte, mais la contrainte maximale applicable sans risquer la destruction de l'échantillon est inférieure à 1 kPa (soit une masse d'eau de 1,25 kg pour le gel d'Agar-Gélatine à 5%). Les mesures réalisées dans les solides classiques mettent en jeu des contraintes très élevées (de l'ordre du GPa), qui permettent des mesures d'une plus grande précision.

Comparons les résultats obtenus pour les gels d'Agar-gélatine à ceux obtenus pour les gels de PVA. Le gel d'Agar-gélatine à 7% de gélatine a un module de cisaillement proche de celui du PVA 2 ( $\mu \sim 8$  kPa). Ainsi ces deux gels possèdent un comportement analogue du point de vue de l'élasticité linéaire. Par contre, le module de Landau  $A$  est négatif dans le cas de l'Agar-gélatine, de sorte que la vitesse mesurée dans la direction [12] diminue sous l'action de la contrainte, alors que  $A$  est positif dans le PVA, ce qui se traduit par une augmentation de la vitesse dans cette même direction. De même, si l'on compare le gel de PVA 3 avec celui d'Agar-gélatine à 15% de gélatine, dont les modules de cisaillement  $\mu$  sont proches (environ 20 kPa), le module de Landau  $A$  du gel d'Agar-gélatine est presque 10 fois supérieur à celui du PVA. Plus globalement, si les deux types de gels testés couvrent la même gamme de valeur de  $\mu$  (de 4 à 20 kPa), la plage de variation de  $A$  est elle beaucoup plus large dans la gélatine (de -28 à 394 kPa) que dans le PVA (de -17 à 43 kPa). Ainsi ces deux types de gels présentent un comportement non linéaire différent. Si ils simulent bien l'élasticité linéaire des tissus biologiques, rien ne permet d'affirmer qu'un de ces gels reproduit correctement la non linéarité de l'élasticité de cisaillement des tissus biologiques. Si l'on peut supposer que le module de Landau  $A$  est de l'ordre du kPa dans les tissus biologiques, il n'est pas possible d'affirmer quel est son signe ou sa valeur précise à partir de ces résultats. Des tissus biologiques présentant un module linéaire de cisaillement proche peuvent potentiellement avoir un module de Landau  $A$  assez différent.

La valeur du module de cisaillement est la moyenne des trois mesures effectuées à contrainte nulle, en supposant le milieu isotrope. Pour les plans [12] et [13], les mesures ont été réalisées à mi-hauteur du cylindre. L'écart type obtenu, en particulier pour le gel d'Agar-gélatine à 5% peut s'expliquer par le fait que le gel est précontraint sous son propre poids. Considérons un plan horizontal à une altitude donnée d'un échantillon cylindrique non uni-axialement contraint. La colonne de gel située au dessus de ce plan exerce un poids sur la surface du plan. Cette colonne induit donc une contrainte sur la partie inférieure de l'échantillon. L'amplitude de cette contrainte est fonction de la hauteur de la colonne de gel. La vitesse de phase d'une onde de cisaillement dans un plan horizontal doit varier en fonction de son altitude. Afin de vérifier cette hypothèse, nous avons réalisé une mesure dans le gel d'Agar-gélatine à 5%. Le tableau 3.3 contient les valeurs du module de cisaillement déduites de la propagation dans le plan horizontal en fonction de la hauteur de ce plan dans l'échantillon.

Hauteur (cm)	2	4	6	8	10
$\mu$ (kPa)	$6,5 \pm 0,2$	$6,5 \pm 0,1$	$6,6 \pm 0,2$	$6,7 \pm 0,2$	$6,8 \pm 0,8$

Tableau 3.3 : Module de cisaillement mesuré dans le plan horizontal [13] sur un gel d'Agar-gélatine (5%), à contrainte nulle, en fonction de l'altitude du plan [13].

Le module de cisaillement augmente avec la hauteur de la colonne de gel située au dessus du plan de mesure. Ceci confirme l'influence du poids sur les mesures. Sur la figure 3.19, on constate que l'influence de la gravité se manifeste moins lorsque la concentration en gélatine est plus importante. Les gels de PVA semblent moins sensibles aux effets de la gravité que les gels de gélatine. Ce constat peut être rapproché de la valeur du module de Landau. Le PVA 1 ayant un module  $A$  plus faible (-17,5 kPa), à contrainte égale son module de cisaillement varie moins que celui de la gélatine (-37,7 kPa pour l'Agar-gélatine 5%).

Considérons un type de gel donné (Agar-gélatine ou PVA). En fonction de ses propriétés, qu'il s'agisse de la concentration en gélatine ou du nombre de cycles mis en oeuvre pour sa fabrication, les modules de cisaillement et de Landau augmentent. De plus, nous avons constaté un changement de signe du module de Landau. Ce changement est sans doute lié à des modifications de microstructure. Ces modifications peuvent être la conséquence des variations de proportion du mélange eau/Agar/gélatine, entraînant une modification des interactions entre les constituants.

Des publications font état de mesures de constantes élastiques du troisième ordre par acoustoélasticité dans différents verres<sup>150,151</sup>. Les auteurs mettent en évidence que les variations de célérité des ondes longitudinales et transversales sous l'action d'une contrainte hydrostatique ne sont pas les mêmes selon le type de verre. Les résultats montrent des différences quant au signe de la dérivée de la célérité par rapport à la contrainte. Ce signe est fonction des constituants du verre.

Par ailleurs, ce changement de signe du module de Landau  $A$  suggère qu'il existe *a priori*, pour le gel d'Agar-gélatine, une concentration en gélatine particulière, pour laquelle  $A \sim 0$ . L'énergie de déformation pour les ondes planes de cisaillement ne comporterait alors, dans le cas d'un milieu isotrope incompressible, plus de termes cubiques. L'application d'une contrainte uni-axiale sur un tel milieu ne modifierait pas le module de cisaillement dans le plan [13] (équation 3.61). De plus elle affecterait de façon symétrique les variations de célérités dans les configuration [12] (pour laquelle la célérité augmenterait linéairement avec la contrainte –équation 3.62-) et [21] (pour laquelle elle diminuerait –équation 3.60-). Pour ces deux vitesses, la valeur absolue de la pente serait 1. Ainsi la seule contribution à l'anisotropie induite par l'application d'une contrainte serait le terme non linéaire quadratique du tenseur des déformations, aussi connu sous le nom de non linéarité géométrique. Elle ne dépendrait plus de la non linéarité de l'élasticité de cisaillement du milieu. Si un tel milieu est difficile à obtenir dans le cas du PVA, il peut être approché pour les gels d'Agar-gélatine, en faisant varier progressivement la concentration en gélatine, jusqu'à obtention d'un module de Landau  $A$  qui tend vers zéro. Nos résultats suggèrent que cette concentration se situe entre 8,5 et 10% de gélatine.

Le module du troisième ordre  $A$  est représenté en fonction du module de cisaillement  $\mu$  sur la figure 3.20. Pour la gamme de concentrations en gélatine utilisée, le module de Landau  $A$  semble croître exponentiellement en fonction du module de cisaillement. Par contre pour les gels de PVA, aucun comportement particulier n'est discernable en raison du faible nombre d'échantillons testés. Cette dépendance observée entre  $\mu$  et  $A$  reste phénoménologique. Un écart à ce comportement exponentiel devrait avoir lieu pour des concentrations en gélatine plus importante, le module du troisième ordre ne pouvant être d'un ordre de grandeur très supérieur à celui du module de cisaillement.

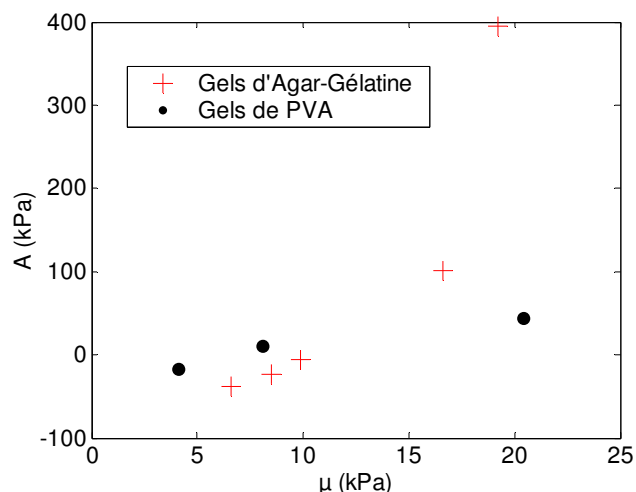


Figure 3.20 : Variations du module de Landau  $A$  en fonction du module de cisaillement  $\mu$  pour un même type de gel. En rouge, les gels d'Agar-gélatine et en noir les gels de PVA.

Pour étudier ce comportement plus en détail, il serait nécessaire d'introduire un modèle statistique permettant de relier les constituants microscopiques aux phénomènes macroscopiques, dont la mécanique des milieux continus permet de rendre compte. Une telle étude sort du cadre de cette thèse. Néanmoins, toujours d'un point de vue qualitatif, l'hypothèse d'un lien entre le module de cisaillement et le module du troisième ordre de Landau ne semble pas sans fondement. En effet, le module de cisaillement  $\mu$  et le coefficient de Landau  $A$ , sont deux paramètres qui correspondent au développement de la densité d'énergie pour de faibles déformations. Ces deux paramètres rendent donc nécessairement compte, à des degrés de raffinement différents, de l'élasticité de cisaillement du matériau.

L'hypothèse d'un lien entre les paramètres linéaires et non linéaires a fait l'objet d'études dans les fluides (donc sur les phénomènes non linéaires affectant les ondes de compression). Ballou a proposé une loi empirique selon laquelle le rapport  $B/A$  (le coefficient de non linéarité thermodynamique introduit au premier chapitre) est proportionnel à l'inverse de la vitesse du son dans le fluide<sup>152</sup>. Elle peut s'interpréter de la façon suivante : pour obtenir des effets non linéaires de même amplitude (par exemple la variation relative de la vitesse du son en fonction de la pression hydrostatique appliquée), plus la « raideur » d'un milieu est importante, plus l'amplitude de la pression hydrostatique devra être grande. Cette loi permet par exemple de retrouver qualitativement l'évolution du paramètre  $B/A$  en fonction de la vitesse du son dans les mélanges eau-éthanol<sup>153</sup>. Elle n'est clairement pas vérifiée ici. Cette

analogie n'est pas transposable aux ondes de cisaillement, puisque les transformations mises en jeu lors de leur propagation se font sans changement de volume.

### 3.4.7. Conclusion

Avec l'hypothèse d'incompressibilité, un seul paramètre non linéaire est mis en jeu dans les variations du module de cisaillement induit par une contrainte uni-axiale. Nous avons appliqué la méthode de génération d'une onde de cisaillement par la force de radiation à la mesure du module élastique de Landau  $A$  de différents gels. L'onde créée dans le milieu étant quasi-plane, cette méthode permet de s'affranchir des effets de diffraction qui rendaient plus difficiles les mesures déjà réalisées à l'aide du « palpeur acoustique ». Les résultats mettent en évidence que le module de Landau  $A$  augmente, comme le module de cisaillement, avec la concentration en gélatine dans le cas des gels d'Agar gélatine, ou avec le traitement thermique auquel est soumis le gel pour le PVA.

Le dispositif expérimental reste à améliorer afin de rendre les mesures plus précises. L'étude de l'influence des variations de température sur les mesures (notamment concernant les gels de gélatine) reste à faire. L'objectif est de pouvoir estimer le module de Landau  $A$  de manière fiable à partir de la variation d'un seul des trois modules de cisaillement sous l'action d'une contrainte uniaxiale, afin de pouvoir envisager des applications *in vivo*.

## 3.5. Propagation non linéaire d'une onde plane de cisaillement : mesure du coefficient élastique du quatrième ordre $D$

En comparant l'amplitude de la troisième harmonique mesurée lors de la propagation non linéaire d'une onde plane de cisaillement de grande amplitude à l'expression analytique obtenue dans le cadre de l'approximation non linéaire faible, nous obtenons une estimation du coefficient de non linéarité associé aux ondes de cisaillement dans un gel d'Agar-gélatine de concentration en gélatine égale à 5%. Puis, en utilisant la valeur du module de Landau  $A$  présentée pour ce même gel au paragraphe précédent, une estimation du coefficient élastique du quatrième ordre  $D$ , qui apparaît dans le développement (3.36) de la densité d'énergie potentielle d'un solide incompressible, est obtenue.



### 3.5.1. Expression analytique de l'amplitude de la troisième harmonique

L'équation de Burgers modifiée (3.45) ne possède pas de solution analytique simple. Il est néanmoins possible de rechercher une solution en supposant que le nombre de Gol'dberg est inférieur à l'unité, ou si les distances de propagation mises en jeu sont inférieures à la distance de formation d'une onde de choc<sup>130</sup>. On procède alors par approximations successives, comme pour les ondes longitudinales. La vitesse particulière se décompose en la somme d'une onde primaire et de l'onde secondaire  $v = v^I + v^{III}$ , où  $v^I$  représente l'onde primaire (de l'ordre du nombre de Mach  $\varepsilon_T$ ) solution de l'équation d'onde linéaire :

$$\frac{\partial v^I}{\partial z} - \frac{\eta}{2\rho_0 V_T^3} \frac{\partial^2 v^I}{\partial \tau^2} = 0, \quad (3.68)$$

et  $v^{III}$  l'onde secondaire (de l'ordre de  $\varepsilon_T^3$ ) solution de l'équation de Burgers modifiée avec un terme source induit par la composante primaire  $v^I$  :

$$\frac{\partial v^{III}}{\partial z} - \frac{\eta}{2\rho_0 V_T^3} \frac{\partial^2 v^{III}}{\partial \tau^2} = \frac{\beta_T}{V_T^3} (v^I)^2 \frac{\partial v^I}{\partial \tau}. \quad (3.69)$$

En considérant une onde plane harmonique de fréquence  $f_0$ , la vitesse particulière émise par la source s'écrit :

$$v^I(z=0, \tau) = v_0 \cos(2\pi f_0 \tau), \quad (3.70)$$

$$v^{III}(z=0, \tau) = 0. \quad (3.71)$$

Après une distance de propagation  $z$ , la résolution de ces équations donne :

$$v^I(z, \tau) = v_0 e^{-\alpha_0 z} \cos(\omega_0 \tau), \quad (3.72)$$

$$v^{III}(z, \tau) = -\frac{\beta_T \omega_0}{24 V_T^3 \alpha_0} v_0^3 e^{-3\alpha_0 z} (1 - e^{-6\alpha_0 z}) \sin(3\omega_0 \tau). \quad (3.73)$$

L'onde secondaire est, comme on l'a vu à propos de la solution sans dissipation, une composante de fréquence égale à la troisième harmonique. Son amplitude est proportionnelle au cube de l'amplitude de la source et au coefficient de non linéarité  $\beta_T$ . Pour des distances de propagation  $z$  telles que  $\alpha_0 z \ll 1$ , cette composante croît linéairement avec la distance. Au-delà, l'atténuation limite le processus non linéaire cumulatif et l'amplitude de la troisième harmonique décroît. L'origine de cette décroissance provient à la fois de l'atténuation de l'amplitude de l'onde primaire (que l'on retrouve dans l'expression de  $v^{III}$  via le terme en  $\exp(-3\alpha_0 z)$ ), et de l'onde secondaire créée (via le terme en  $\exp(-9\alpha_0 z)$ ), obtenu en supposant que le coefficient d'atténuation varie quadratiquement avec la fréquence de l'onde).

Dans ce qui suit nous utilisons cette expression pour estimer la valeur du coefficient de non linéarité  $\beta_T$ .

### 3.5.2. Mesure de la constante élastique du quatrième ordre $D$

L'amplitude de l'onde de cisaillement engendrée par la force de radiation n'est pas suffisante pour que le nombre de Gold'berg (1.32), associé à l'onde de cisaillement (avec la distance de choc définie par (3.47)), soit suffisamment élevé pour que des effets non linéaires puissent être mesurés avec un bon rapport signal sur bruit. Par ailleurs, si l'onde peut être considérée comme plane dans le plan d'imagerie, les effets de diffraction répartissent l'énergie dans un cône dont l'axe est la direction du faisceau incident. Aussi, afin de créer une onde plane de cisaillement avec une amplitude suffisante pour que des effets non linéaires cubiques puissent être observés et quantifiés, il nous faut donc procéder autrement. Des mesures de ce type ont été effectuées au LOA par Jean-Luc Gennisson<sup>132</sup>. La formation d'une onde de choc de cisaillement a alors été observée expérimentalement pour la première fois. En comparant l'amplitude des harmoniques observées à une simulation numérique basée sur la discrétisation de l'équation de Burgers modifiée<sup>XLI</sup> utilisant un algorithme de capture de choc<sup>154</sup>, une première estimation du coefficient de non linéarité de cisaillement d'un gel assez mou ( $\mu = 2,8$  kPa) a été obtenue ( $\beta_T = 2,7$ ). A l'aide de ce même dispositif, Xavier Jacob a mis en évidence que l'interaction de deux ondes planes de cisaillement conduit à la génération de composantes de fréquences  $f_1+2f_2, f_1-2f_2, 2f_1+f_2$  et  $2f_1-f_2$ <sup>155</sup>. Nous utilisons à nouveau ce dispositif afin d'estimer, en combinant la valeur du coefficient de non linéarité  $\beta_T$  et la valeur du module de Landau  $A$  obtenue au précédemment, la constante élastique du quatrième ordre  $D$ . Contrairement aux précédentes études, le coefficient de non linéarité est ici obtenu par comparaison des résultats expérimentaux avec l'expression analytique (3.73) de l'amplitude de la troisième harmonique. Bien que le nombre de Gol'dberg soit trop élevé pour qu'un traitement en perturbation soit rigoureusement justifié, nous avons choisi cette méthode en raison de sa simplicité.

Le dispositif expérimental est représenté sur la figure 3.21. La source est une plaque (20 cm x 10 cm), prise dans le gel d'Agar-gélatine. Elle est reliée à un pot vibrant délivrant un train

---

<sup>XLI</sup> Ce code, initialement écrit par Mickael Tanter au laboratoire pour l'équation de Burgers non dissipative, a été transposé aux ondes de cisaillement par Jean-luc Gennisson et Stefan Catheline. Les effets de l'absorption, implémentés dans le domaine temporel, sont calculés au moyen d'un produit de convolution.

d'ondes de fréquence centrale  $f_0 = 100 \text{ Hz}^{\text{XLII}}$  contenant cinq arches de sinusoïdes et dont l'enveloppe est de forme gaussienne. L'amplitude de la source est contrôlée par un atténuateur variable. Un capteur de force de large bande passante permet de s'assurer que la vibration de la source ne contient pas d'harmoniques ( cf. figure 3.22). La plaque émet ainsi une onde plane de cisaillement polarisée dans la direction  $x$  et se propage suivant  $z$ . La barrette de l'échographe ultrarapide décrit auparavant (cf. 3.2.2.1) est placée parallèlement à la plaque, à une distance d'environ 5 mm. Il n'est utilisé que pour mesurer les déplacements du milieu induits par la plaque.

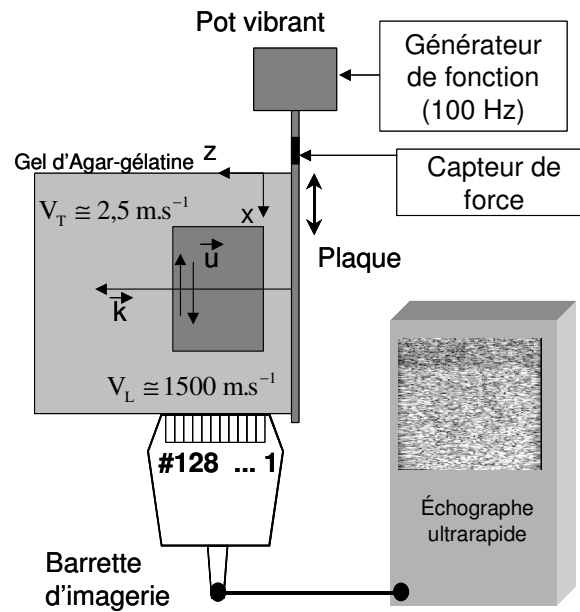


Figure 3.21 : Dispositif expérimental utilisé pour engendrer et observer la propagation non linéaire d'une onde plane de cisaillement.

<sup>XLII</sup> Cette fréquence est choisie de façon à maximiser les effets non linéaires cumulatifs sans atténuation trop prohibitive de la troisième harmonique.

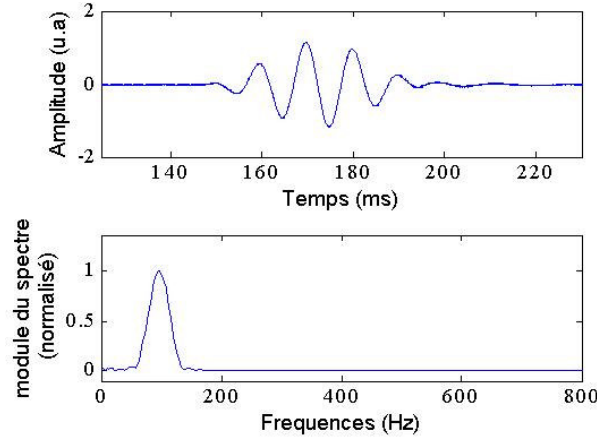


Figure 3.22: Signal fourni par le capteur de force et module du spectre correspondant.

Pour estimer la valeur du coefficient de non linéarité  $\beta_T$  à partir de l'amplitude de la troisième harmonique (3.73), il faut au préalable mesurer les paramètres linéaires du solide mou (la vitesse de propagation et l'atténuation). La célérité est cette fois simplement déduite du déphasage du train d'ondes entre deux images successives. Elle vaut  $V_T = 2,56 \text{ m.s}^{-1}$ . Nous vérifions que le module de cisaillement obtenu ( $\mu = 6,55 \text{ kPa}$ ) est bien le même que pour l'échantillon utilisé pour la mesure du module de Landau  $A$  (cf. tableau 3.2). Le coefficient d'atténuation  $\alpha_0$  est mesuré dans le cas où la plaque vibre avec une amplitude suffisamment faible pour que la propagation puisse être considérée comme linéaire. Il est déduit des variations du logarithme de l'amplitude de la vitesse particulaire en fonction de la distance  $z$  (figure 3.23). La valeur obtenue est :  $\alpha_0 = 17 \text{ Np/m}$ . La longueur d'atténuation est alors  $L_a = 59 \text{ mm}$ . L'amplitude de la source est mesurée au plus près, soit à environ 5 mm de la plaque, puis « corrigée » de l'atténuation.

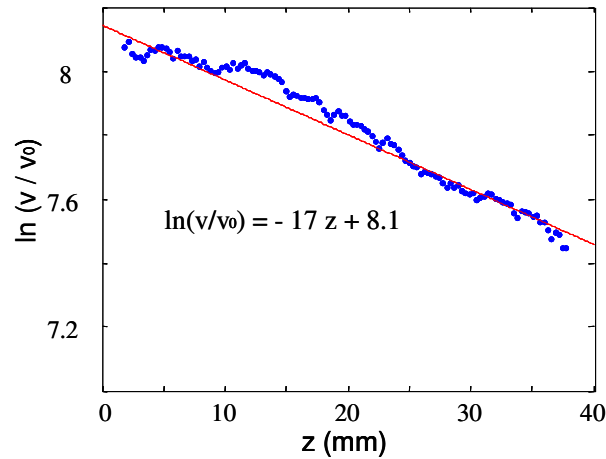


Figure 3.23 : Mesure du coefficient d'atténuation d'un train d'ondes de fréquence centrale  $f_0 = 100$  Hz. Nous avons également vérifié que le coefficient d'atténuation varie quadratiquement en fonction de la fréquence  $f_0$  de l'onde de cisaillement (cf. figure 3.24) sur une gamme de fréquence allant de 50 à 1000 Hz, comme cela est supposé pour établir l'expression (3.73).

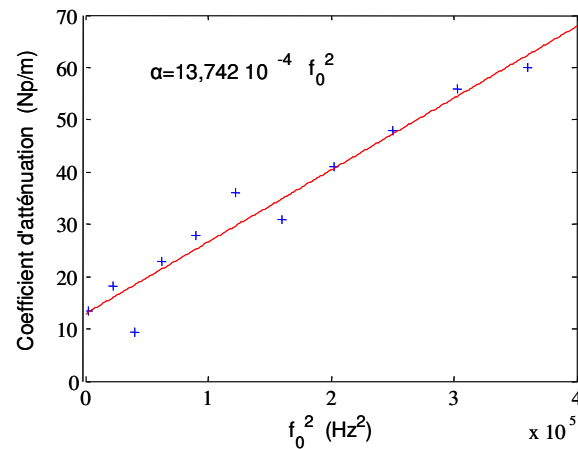


Figure :3.24 : Evolution du coefficient d'atténuation d'un gel d'Agar Gélatine (5%) en fonction du carré de la fréquence centrale  $f_0$  du train d'ondes. Le coefficient directeur de la droite est obtenu par régression linéaire au sens des moindres carrés.

En régime non linéaire, le signal mesuré à une distance de la source égale à  $z = 17$  mm est représenté à titre d'exemple sur la figure 3.25. La troisième harmonique est extraite de la vitesse particulière à l'aide d'un filtrage passe-bande (fréquences de coupure  $3f_0 \pm 50$  Hz)..

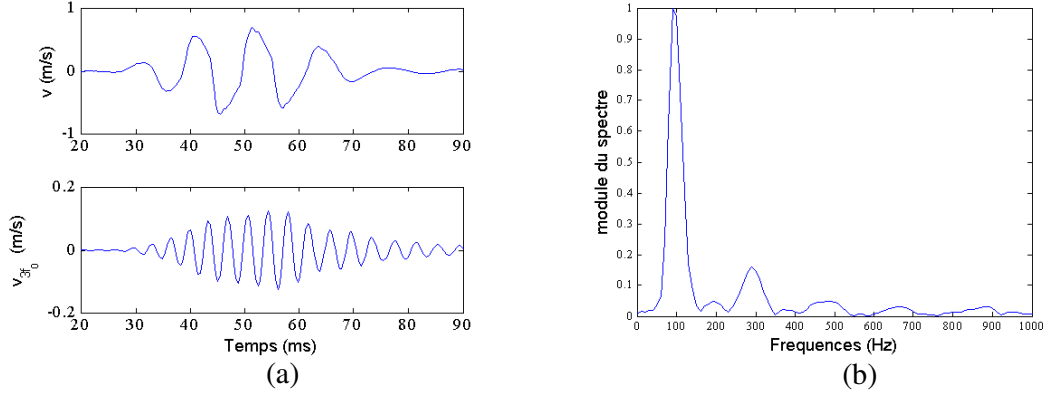


Figure 3.25 : (a) Vitesse particulaire totale  $v$  et troisième harmonique correspondante à la distance  $z = 17$  mm. (b) Spectre de la vitesse particulaire  $v$ .

L'évolution de l'amplitude de la composante à  $3f_0$  est ensuite mesurée pour plusieurs valeurs de l'amplitude de la source. Les résultats obtenus pour deux amplitudes différentes ( $v_0 = 0,88$  m/s (a) et  $v_0 = 0,70$  m/s (b)) sont représentés sur la figure 3.26. Les courbes données par l'équation (3.73) sont superposées. Le coefficient de non linéarité est ajusté pour que celles-ci coïncident au mieux avec les résultats expérimentaux, pour des distances où l'amplitude est croissante, avant la formation du choc.

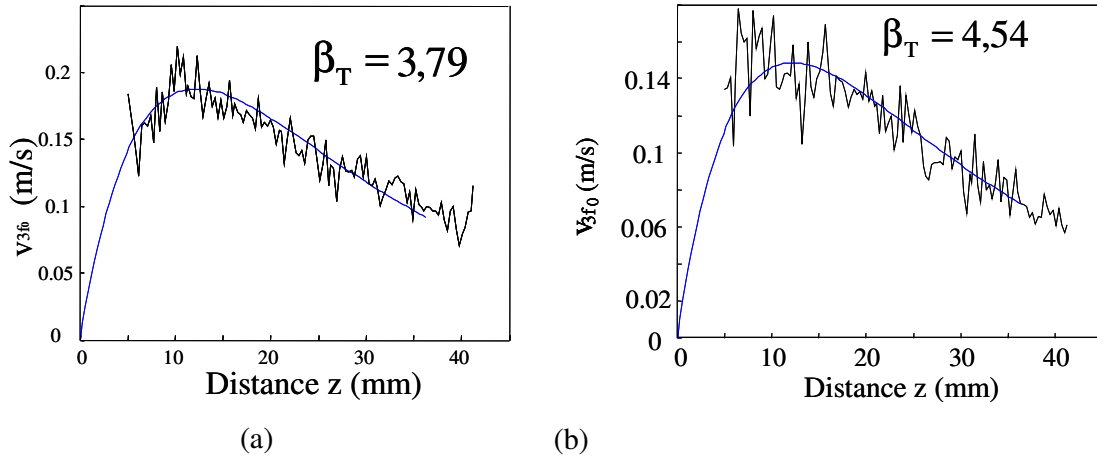


Figure 3.26 : Evolution de l'amplitude de la troisième harmonique  $v_{3f_0}$  en fonction de la distance de propagation  $z$ . (a) Pour une amplitude de la source  $v_0 = 0,88$  m/s ( $\epsilon_T = 0,35$ ). (b) Pour une amplitude  $v_0 = 0,7$  m/s ( $\epsilon_T = 0,28$ ).

Les points représentent les résultats expérimentaux. La courbe bleue est déduite de l'équation 3.73.

Les valeurs obtenues sont reportées dans le tableau 3.4 ci-dessous.

Amplitude $v_0$ (m/s)	0,88	0,78	0,70
$\beta_T$	3,79	3,57	4,54
$L_C^T$ (mm)	10,2	12,9	16,2

Tableau 3.4 : Résultats de la mesure du paramètre non linéaire  $\beta_T$  en fonction de l'amplitude de la source.

Les distances de choc calculées à l'aide de l'expression (3.47) coïncident à peu près avec la position du maximum mesuré expérimentalement. Bien que ce modèle ne soit plus valable au-delà de la distance de choc, la décroissance de l'amplitude de la troisième harmonique ne s'écarte pas beaucoup, au-delà de cette distance, du comportement exponentiel décroissant prévu par le modèle quasi-linéaire.

La valeur moyenne et l'écart type des résultats des trois expériences fournissent une estimation du coefficient de non linéarité relatif aux ondes de cisaillement :  $\beta_T = 4 \pm 0,5$ .

Les sources d'erreurs sur la détermination de  $\beta_T$  sont les suivantes :

- L'erreur sur la mesure de la distance séparant la plaque de la barrette.
- L'erreur commise sur la mesure de l'amplitude de la source. Il s'agit de la plus grande source d'erreur, l'amplitude de la source intervenant au cube dans l'expression de la troisième harmonique.
- L'erreur commise sur le coefficient d'atténuation : la mesure de l'amplitude de la vitesse particulière avec un niveau faible afin de garantir la linéarité de la propagation dégrade le rapport signal sur bruit.

Ayant mesuré, dans un même gel d'Agar-gélatine (contenant 5% de gélatine), le coefficient de non linéarité et les modules de cisaillement  $\mu$  et de Landau  $A$ , il est possible de déduire la constante élastique du quatrième ordre  $D$ , selon la relation déduite de la définition du paramètre non linéaire :  $D = \mu(2\beta_T / 3 - 1) - A / 2$ . Avec  $\mu = 6,6 \pm 0,6$  kPa,  $A = -37,7 \pm 9,8$  kPa et  $\beta_T = 4 \pm 0,5$ , il vient  $D = 30 \pm 10$  kPa.

Ainsi, comme les modules de cisaillement  $\mu$  et de Landau  $A$ , cette constante élastique  $D$ , qui pondère le terme du quatrième ordre dans l'énergie de déformation d'un milieu incompressible, est de l'ordre de la dizaine de kPa. L'écart type obtenu sur la valeur de  $D$  est dû pour l'essentiel à l'écart type sur les mesures du module  $A$ . L'amélioration du dispositif expérimental de la section 3.4 devrait permettre de le réduire.

Nous avons expérimentalement observé un changement de signe du module de Landau  $A$  en fonction de la concentration en gélatine. Négatif pour des concentrations inférieures à 10%, il devient positif pour des plus fortes concentrations. Qu'en est-il pour le coefficient  $D$  ?

Des essais ont été réalisés sur un gel contenant 7% en gélatine. Comme le module de cisaillement de ce gel est plus important que celui contenant 5% de gélatine et comme l'amplitude de la vitesse particulaire pour une même tension d'excitation du pot vibrant est plus faible, il en résulte un nombre de Mach  $\varepsilon_T$  plus petit. En conséquence, l'amplitude de la troisième harmonique est difficilement extraite du bruit. Néanmoins l'atténuation semble moins importante. Il est donc envisagé d'augmenter la fréquence  $f_0$  du train d'ondes pour remédier à ce problème.

### **3.5.3. Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons tout d'abord vérifié que l'auto-démodulation non linéaire ne contribue pas, ou très peu, au mécanisme de génération de la force de radiation dans un solide mou. Celle-ci semble donc provenir d'un transfert de quantité de mouvement de l'onde au milieu induit par l'atténuation. Ensuite, en utilisant la formulation de la densité d'énergie potentielle élastique développée pour les milieux incompressibles, nous avons étudié expérimentalement l'élasticité de cisaillement  $\mu$  de gels utilisés pour simuler les propriétés mécaniques des tissus biologiques. Une première expérience d'acousto-élasticité nous a permis de mesurer le module de cisaillement et le module de Landau  $A$ , intervenant dans la propagation des ondes de cisaillement dans les tissus biologiques. L'utilisation de la force de radiation pour créer une onde de cisaillement permet de réduire les artefacts dus à la diffraction qui interviennent lors de l'utilisation d'une source peu étendue. Ces mesures, effectuées dans différents gels, montrent que le module de Landau  $A$  augmente, conjointement avec le module de cisaillement  $\mu$ . Le comportement non linéaire dépend de la nature du gel. En combinant l'expérience d'acousto-élasticité avec une mesure de l'amplitude de la troisième harmonique, réalisée en générant une onde de cisaillement plane de grande amplitude, une estimation de la constante élastique du quatrième ordre  $D$ , non mesurée jusqu'ici, est obtenue. Pour un gel d'Agar-Gélatine à 5%, cette constante est positive et de l'ordre de quelques dizaines de kPa. Ainsi, le module de cisaillement  $\mu$ , le module de Landau  $A$  et le paramètre  $D$  sont du même ordre de grandeur.





## Conclusion générale

Dans un fluide libre, l'hypothèse d'ondes plane n'étant pas vérifiée en pratique pour une onde harmonique, la pression de radiation usuellement considérée est celle de Langevin, résultant d'un transfert local de quantité de mouvement de l'onde à l'objet. La pression de radiation de Rayleigh est alors introduite à partir des relations de Langevin avec l'hypothèse d'une isolation mécanique (le confinement) permettant l'existence d'un excès moyen de pression à travers le fluide. L'extension de la pression de radiation de Langevin au cas d'un train d'ondes nous a amené à envisager celle de la pression de radiation de Rayleigh.

L'objectif de ce travail était tout d'abord d'étudier le lien entre la pression de radiation Rayleigh et l'auto-démodulation non linéaire d'un train d'ondes émis dans un fluide non confiné. Notre approche a consisté à aborder ce problème à partir de l'auto-démodulation. L'interférométrie optique est particulièrement bien adaptée à cette étude car elle possède une large bande passante et une bonne sensibilité. Nous avons mesuré la composante auto-démodulée du déplacement d'une particule de fluide, créée lors de la propagation d'un train d'ondes dont l'enveloppe est de forme rectangulaire. En champ proche, le déplacement auto-démodulé possède la forme temporelle de l'enveloppe du train d'ondes, puis tend vers la dérivée de celle-ci sous l'effet de la diffraction. Il existe donc en champ proche un déplacement quasi-statique, qui peut être interprété comme une valeur moyenne temporelle non nulle du déplacement de la particule. A plus grande distance, la diffraction tend à annuler cette valeur moyenne. Ce régime de diffraction de la composante auto-démodulée est quasi-linéaire. L'écart à un modèle simple en ondes planes apparaît pour une distance égale à la distance de Rayleigh associée à cette composante de basse fréquence. Le dispositif expérimental utilisé a permis de mesurer le coefficient de non linéarité du fluide. Les valeurs obtenues dans l'eau et dans l'éthanol sont en bon accord avec celles couramment admises.

La simulation numérique, basée sur l'équation KZK écrite en potentiel, a confirmé les résultats expérimentaux. En particulier, le rôle de l'atténuation de l'onde primaire est, à la fréquence centrale du train d'ondes utilisé lors des expériences, moins important que celui de la diffraction dans la limitation du processus cumulatif.

Nous avons calculé la pression associée à ce déplacement quasi-statique observé en champ proche. Nous avons montré que la pression auto-démodulée est composée de deux termes. Le premier, cumulatif, correspond à la pression auto-démodulée que l'on retrouve dans la littérature. Le second, non cumulatif, correspond formellement à l'excès moyen de pression Lagrangien conduisant à la pression de radiation de Rayleigh. Ainsi, en train d'ondes, celle-ci peut exister en champ proche en l'absence de confinement. La directivité de la source et la propagation non linéaire de l'onde suffisent à « confiner » localement et temporairement le milieu. La diffraction tend à annuler la composante quasi-statique de la pression eulerienne, en particulier au foyer d'un transducteur focalisé. La distance à laquelle cette annulation a lieu est d'autant plus courte que le train d'ondes est de durée longue. Deux résultats connus sont alors retrouvés. D'une part la pression auto-démodulée est réduite au seul terme cumulatif. D'autre part une mesure de la force de radiation conduit, en raison de l'annulation de l'excès moyen de pression en coordonnées euleriennes, au résultat de Langevin. Certaines incohérences subsistent d'un point de vue théorique. En particulier, pour que la pression de radiation de Langevin soit retrouvée en champ lointain, il est nécessaire de supposer que seule une partie (la constante  $C$  apparaissant dans la première relation de Langevin) de la pression quasi-statique en coordonnées lagrangiennes s'annule du fait de la diffraction de la composante auto-démodulé. En abordant le problème du point de vue de la propagation non linéaire, cette constante n'apparaît pas explicitement. Cette démarche ne permet pas de passer de la pression de radiation de Rayleigh à celle de Langevin. La constante  $C$  est une constante d'intégration, calculée en faisant intervenir les phénomènes non linéaires cumulatifs (qui ont pour origine l'équation de conservation de la masse et l'équation d'état du fluide).

Nous envisageons d'effectuer une mesure de la puissance émise par un transducteur (de grand diamètre suffisant) émettant un train d'ondes en fonction de la distance le séparant de la cible à l'aide une balance acoustique. Cette mesure devrait nous permettre d'étudier plus en détail la transition de la pression de Rayleigh (en champ proche) à la pression de Langevin (en champ lointain).

Par ailleurs, la simulation numérique permet d'envisager l'étude des effets de la pression quasi-statique dans un milieu contenant des hétérogénéités localisées.

Au vu de ces résultats, la question de la contribution de la composante auto-démodulée lors du processus de génération de l'onde de cisaillement induite par la force de radiation dans les tissus biologiques s'est naturellement posée. Cette contribution apparaît comme étant négligeable devant celle due au transfert de quantité de mouvement induit par l'absorption de l'onde ultrasonore, phénomène analogue à celui qui est à l'origine du streaming acoustique dans les fluides absorbants. En conséquence il n'est pas possible de « tirer » le milieu grâce à l'auto-démodulation. Si le dispositif expérimental rend délicate l'évaluation de l'importance de cette contribution, un calcul effectué à partir de la fonction de Green viscoélastique devrait le permettre.

Nous avons aussi étudié expérimentalement l'élasticité de cisaillement de solides mous. Dans un premier temps, en utilisant le modèle du milieu solide mou quasi-incompressible appliqué à l'acousto-élasticité, nous avons mesuré les variations du module de cisaillement de gels sous l'action d'une contrainte statique. Ces variations ne dépendent que du module de cisaillement  $\mu$  et du module de Landau  $A$ . Des gels possédant des modules de cisaillement  $\mu$  proches peuvent par contre avoir des modules de Landau  $A$  dont la valeur et le signe sont différents. L'utilisation de la force de radiation pour créer l'impulsion de cisaillement permet de réduire les artefacts liés à la diffraction qui étaient présents lors des mesures réalisées précédemment. L'amélioration du dispositif expérimental permettra d'envisager des applications *in vivo*. Dans un deuxième temps nous avons mesuré l'amplitude de la troisième harmonique engendrée lors de la propagation d'une onde plane de cisaillement de forte amplitude. Bien que la propagation soit assez fortement non linéaire, la comparaison avec l'expression analytique donnée par l'approximation non linéaire faible (plus simple à mettre en œuvre qu'une simulation de l'équation de Burgers modifiée) indique que l'erreur commise lors de cette approximation reste assez faible. A partir de la valeur déduite du coefficient de non linéarité  $\beta_T$  et du module de Landau  $A$  mesuré lors de l'expérience d'acoustoélasticité, nous avons déduit la valeur de la constante élastique du 4<sup>ème</sup> ordre  $D$  dans un gel d'Agar-gélatine (contenant 5% de gélatine). A notre connaissance cette constante n'avait jamais été mesurée. Elle est du même ordre de grandeur (le kPa) que les modules  $\mu$  et  $A$ . Des mesures de cette constante dans des gels de concentration en gélatine plus élevée sont en cours. Comme le module de cisaillement augmente avec la concentration en gélatine, le nombre de Mach de ces gels devrait être plus faible et la distance de choc plus longue. Ainsi, l'utilisation de l'expression de l'amplitude de la troisième harmonique sera justifiée plus rigoureusement.

## Références

---

- <sup>1</sup> D. T. Blackstock, “ History of nonlinear acoustics: 1750s-1930s, ” in Nonlinear Acoustics, chapitre 1, p. 1-23, édité par M. F. Hamilton et D. T. Blackstock (Academic, New York, 1998).
- <sup>2</sup> R. T. Beyer. “Parameter of Nonlinearity in Fluids,“. J. Acoust. Soc. Am., 32, 719-721, 1960.
- <sup>3</sup> S. Makarov S. et M. Ochmann, “Nonlinear and Thermoviscous Phenomena in Acoustics, Part I;”. Acustica, 82, 579-606, 1996.
- <sup>4</sup> S. I. Aanonsen, T Barkve, J. Naze Tjøtta, and S. Tjøtta, “Distortion and harmonic generation in the near field of a finite amplitude sound beam, ” J. Acoust. Soc. Am. **75**, 749-768 (1984)
- <sup>5</sup> R. T. Beyer, Non linear Acoustics (Naval Sea System Commands), Washington, DC, 1974
- <sup>6</sup> L. Landau et E. Lifschitz. “Physique théorique Tome 1 : Mécanique, “ Edition MIR, Moscou,1971
- <sup>7</sup> D. T. Blackstock, “ Progressive waves in lossless and lossy fluids, ” in Nonlinear Acoustics, chapitre 4, p- 65-150, édité par M. F. Hamilton et D. T. Blackstock (Academic, New York, 1998).
- <sup>8</sup> P. J. Westervelt,“ Parametric acousitc array,“ J. Acoust. Soc. Am. **35**, 535-537 (1963)
- <sup>9</sup> G. B. Whitham, “ Linear and nonlinear waves,“ Wiley, New-york, 1974.
- <sup>10</sup> L. Landau et E. Lifschitz. “Physique théorique Tome 6 : Mécanique des fluides, “ Edition MIR, Moscou,1971
- <sup>11</sup> O. V. Rudenko et S. I. Soluyan. “Theoritical foudations in nonlinear acoustics, “ Studies in Soviet Science,1971
- <sup>12</sup> E. A. Zabolotskaya et R. V. Khokhlov, “Quasi-plane waves in the nonlinear acoustics of confined beams, “ Sov. Phys. Acoust., 15 (1), p. 35-40, 1969.
- <sup>13</sup> V. P. Kuznetsov, “Equations of nonlinear acoustics, “ Soc. Phys. Acoust., 16, p. 467-470, 1971.
- <sup>14</sup> Y. S. Lee, M. F. Hamilton, “Time-domain modelling of pulsed finite-amplitude sound beams, “ J. Acoust. Soc. Am., 97, p. 906-917, 1995.
- <sup>15</sup> R. N. Thurston and M. J. Shapiro, , “Interpretation of ultrasonic experiments on finite-amplitude waves, “ J. Acoust. Soc. Am., 41, p.1112-1125, 1966.
- <sup>16</sup> P. J. Westervelt, “ The mean pressure and velocity in a plane acoustic wave in a gas, “ J. Acoust. Soc. Am, 22 (3), 1950.
- <sup>17</sup> J. C Maxwell, “Treatise on electricity and magnetism. Oxford, “ UK: Clarendon Press. 1873.

- 
- <sup>18</sup> P. N. Lebedev, “ Investigations on the pressure forces of light, “. *Ann. Phys.*, 6, p. 433–45, 1901.
- <sup>19</sup> E. Nichols and G. F. Hull, “On radiation pressure, “ *Ann. Phys.* 12, p. 225–263, 1903.
- <sup>20</sup> B. Pirard, “Analyse et optimisation des trajectoires héliocentriques pour des voiles solaires, “ Mémoire de fin d’étude, Université de Liège, Faculté des sciences appliquées, 2003.
- <sup>21</sup> C. N. Cohen-Tannoudji, “Manipulation of atoms with photons, “ *Rev. Mod. Phys.*, 70(3), p. 707–719, 1998.
- <sup>22</sup> A. Ashkin, “Acceleration and trapping of particles by radiation pressure, “ *Phys. Rev. Lett.*, 24(4), p. 156–159, 1970.
- <sup>23</sup> D. Mc Gloin, “ Twenty years of optical tweezers, “ *Phil. Trans. R. Soc. A*, 364, p. 3521-3537, 2006.
- <sup>24</sup> A. Cassner, “ Déformations, manipulations et instabilité d’interface liquides induites par la pression de radiation d’une onde laser, “ Thèse de doctorat de l’université Bordeaux I, 2002.
- <sup>25</sup> D. A. Hutchins, “ Mechanisms of pulsed photoacoustic generation, “ *Can. J. Phys.*, 36, p. 462, 1965.
- <sup>26</sup> C. G. A. Hoelen et F. F. M. de Mul, “ A new theoretical approach for photoacoustic signal generation, “ *J. Acoust. Soc. Am*, 106, p. 695-706, 1999.
- <sup>27</sup> Lord Rayleigh, “On the pressure of vibrations, “ *Phil Mag* 3, p-338, 1902
- <sup>28</sup> L. Bergmann, “Der Ultraschall, “ 6<sup>ème</sup> édition., p. 208. (S. Hirzel, Stuttgart), 1954.
- <sup>29</sup> W. Altberg, *Ann. Physik*, 11, p-405, 1903.
- <sup>30</sup> R. T. Beyer, “Radiation pressure in a sound wave, ” *Am. J. Phys.*, 15, p. 25-29, 1950.
- <sup>31</sup> J. H. Poynting, *Phil Mag*. 9, p. 393, 1905.
- <sup>32</sup> R. W. Woods, “ Apparatus to illustrate the pressure of sound waves, “ *P. Rev.* 1905.
- <sup>33</sup> Lord Rayleigh, “On the momentum and pressure of gaseous vibrations and on the connection with the virial theorem, “ *Phil Mag* 10, p-393, 1905.
- <sup>34</sup> L. Brillouin, “ Les tenseurs en mécanique et en élasticité, “ Masson et Cie, Paris, 1938.
- <sup>35</sup> P. Biquard , “Les ondes ultra-sonores, “ *Rev. Acoust.* 1, p- 93-109, 1932
- <sup>36</sup> E. J. Post, “Radiation pressure and dispersion, ” *J. Acoust. Soc. Am*, 25 (1), p. 55-60, 1953.
- <sup>37</sup> R.T. Beyer, “ Radiation pressure, a story of a mislabelled tensor, ” *J. Acoust. Soc. Am*, 63 (4), p. 1024-1030, 1978.
- <sup>38</sup> T. Chu and R. E. Apfel, “Acoustic radiation pressure produced by a beam of sound, ” *J. Acoust. Soc. Am.*, **72**, p. 1673-1687, 1982.

- 
- <sup>39</sup> C. P. Lee et T. G. Wang, , “Acoustic radiation pressure, ”, J. Acoust. Soc. Am., 94, p. 1099-1109, 1993.
- <sup>40</sup> T. G. Wang et C. P. Lee, “ Radiation pressure and Acoustic Levitation, ” in Nonlinear Acoustics, chapitre 6, p- 177-205, édité par M. F. Hamilton et D. T. Blackstock (Academic, New York, 1998).
- <sup>41</sup> F. E. Borgnis, “Acoustic radiation pressure of plane compressional waves, “ Rev. Mod. Phys., 25 (3), p. 653-664;1953.
- <sup>42</sup> G. R. Torr, “ The acoustic radiation force, ” Am. J. Phys., 52 (5), p. 402-408; 1984.
- <sup>43</sup> K. Beissner, “The acoustic radiation force in lossless fluids in Eulerian and Lagrangian coordinates, ” J. Acoust. Soc. Am. **103**, p. 2321-2332, 1998.
- <sup>44</sup> K. Beissner, “ Two concept of radiation pressure, ” J. Acoust. Soc. Am, 79, p. 1610-1612, 1986.
- <sup>45</sup> G. Hertz and H . Mende, Z. Phys, 114, p. 354-367, 1939.
- <sup>46</sup> J.A. Rooney and W .L . Nyborg, Am .J .Phys, 40 , p.1825-183, 1972.
- <sup>47</sup> J. H. Cantrell, Jr., “Acoustic radiation stress in solids. I. Theory,” Phys. Rev. B 30, p. 3214–3220,1984.
- <sup>48</sup> W. Zernov, “ Über absolute messunger der schallintensität, ” ,Ann. der Phy.,326, p.131-140. 1906.
- <sup>49</sup> W. Rooney, “ Does radiation pressure depends on B/A ?, ” J. Acoust. Soc. Am, 54, p.429-430, 1973.
- <sup>50</sup> B. L. Smith et G.W. Swift,“ Measuring second-order time-average pressure, ” J. Acoust. Soc. Am, 110, p. 717-723, 2001.
- <sup>51</sup> S. E. Fick and R. R. Breckenridge, “Ultrasonic power output measurement by pulsed radiation pressure, ” J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol. 101, p. 659-669 ,1996.
- <sup>52</sup> P. B. Nagy, “Diffraction correction for a radiation force measurement on an infinite plane target, ” J.Acoust. Soc. Am. 79, p.1794-1797, 1986.
- <sup>53</sup> F. A. Duck, “The measurement of exposure to ultrasound and its application to estimates of ultrasound ‘dose’, ” Phys. Med. Biol., 32 (3), p. 303-325, 1987.
- <sup>54</sup> J. Wu, “ Acoustical tweezers ” J. Acoust. Soc. Am, 89 (5), p. 2140-2143, 1991
- <sup>55</sup> J. Lee, K. Ha et K. K. Shung, “ Theoretical study of the feasibility of acoustical tweezers : Ray acoustic approach, ” J. Acoust. Soc. Am, 117 (5), p. 3276-3280, 2005.
- <sup>56</sup> L. V. King, Proc. R. Soc. London; Ser. A. Math. Physical. Sci., 147, 212 (1934)

- 
- <sup>57</sup> K. Yosika et Y. Kawasima, "Experimental Observation of a Nonlinear Characteristic of the Ultrasonic Scattering," *Acustica*, 5, 168; 1955.
- <sup>58</sup> T. Hasegawa et K. Yosika, "Acoustic-Radiation Force on a Solid Elastic Sphere," *J. Acoust. Soc. Am.*, 46, p. 1139-1143, 1969.
- <sup>59</sup> P.L. Marston, "Axial radiation force of a Bessel beam on a sphere and direction reversal of the force," *J. Acoust. Soc. Am.*, 120, p. 3518-2524, 2006.
- <sup>60</sup> S. Maravuda, G. R. Harris et B.E. Hermann, "Acoustic power calibration of high-intensity focused ultrasound transducers using a radiation force technique," *J. Acoust. Soc. Am.*, 21 (3), p. 1434-1439, 2007.
- <sup>61</sup> G. Madelin, B. Hosten, C. Biateau, C. Mougenot, J-M. Franconi and E. Thiaudière, "Comparison of laser interferometry and radiation force method of measuring ultrasonic power," *Ultrasonics*, 43, p. 769-774, 2005.
- <sup>62</sup> K. R. Nightingale, M. L. Palmeri, R. W. Nightingale, et G. E. Trahey, "On the feasibility of remote palpation using radiation force," *J. Acoust. Soc. Am.*, 110, p. 625-634, 2001.
- <sup>63</sup> H. O. Berktaý, "Possible exploitation of nonlinear acoustics in underwater transmitting applications," *J. Sound. Vib.*, 2, p. 435-461, 1965.
- <sup>64</sup> M. B. Moffett, P. J. Westervelt, et R. T. Beyer, "Large-amplitude pulse propagation-a transient effect I," *J. Acoust. Soc. Am.* 47, p. 1473-1474, 1970.
- <sup>65</sup> P. Cervenka et P. Alais, "Fourier formalism for describing nonlinear self-demodulation of primary narrow ultrasonic beam," *J. Acoust. Soc. Am.* 88, p. 473-481, 1990.
- <sup>66</sup> Y.S. Lee and M. F. Hamilton, "Time-domain modeling of pulsed finite-amplitude sound beams," *J. Acoust. Soc. Am.*, 97, p. 906-917, 1995.
- <sup>67</sup> M. B. Moffett, P. J. Westervelt, et R. T. Beyer, "Large-amplitude pulse propagation-a transient effect II," *J. Acoust. Soc. Am.* 49, p. 339-343, 1971.
- <sup>68</sup> K.-E. Froya, "Weakly nonlinear propagation of a pulse sound beam," *Frontiers of nonlinear acoustics: 12<sup>th</sup> ISNA*, édité par M. F. Hamilton and D.T. Blackstock (Elsevier Applied Science, London, 1990), p. 197-202.
- <sup>69</sup> S. N. Gurbatov, I. Yu Demin, et A. N. Makalhov, "Influence of phase fluctuations on the characteristics of parametric arrays," *Sov. Phy. Acoust.* 26, p. 217-220, 1980.
- <sup>70</sup> M. A. Averkiou, Y. S. Lee, et M.F. Hamilton, "Self-demodulation of amplitude and frequency modulated pulses in thermoviscous fluid," *J. Acoust. Soc. Am.*, 94, p. 2876-2883, 1993.



- 
- <sup>71</sup> Y. S. Lee, “Numerical solution of the KZK equation for pulsed finite-amplitude sound beams in a thermoviscous fluids,” Phd, 1993.
- <sup>72</sup> V. Tournat, V. Gusev , et B. Castagnède “Self-demodulation of elastic waves in a one-dimensional granular chain,” *Phys. Rev E*, 70, 056603, 2004.
- <sup>73</sup> M. Saeid, “Antennes paramétriques pour l’étude de la propagation acoustique dans les matériaux poroélastiques insonorisants,” Thèse de doctorat de l’université du Maine, 2006.
- <sup>74</sup> W.T. Yost et J.H. Cantrell Jr, “Acoustic radiation stress in solids II: Experiments,” *Phys. Rev. B*, 30, 3221-3229, 1984
- <sup>75</sup> X. Jacob, R. Takatsu, C. Barrière et D. Royer, “Experimental study of acoustic radiation strain in solid,” *Appl. Phys. Lett.*, 88, 134111, 2006.
- <sup>76</sup> D. Royer, N. Dubois, and M. Fink, “Optical probing for pulsed, focused ultrasonic fields using a heterodyne interferometer,” *App. Phys. Lett.*, **61**, 153-155, 1992.
- <sup>77</sup> D. Certon, O. Casula, F. Patat, and D. Royer, “ Theoretical and experimental investigation of lateral modes in 1-3 piezocomposites, “1994 *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., Freq Contr.*, **44**, 643-651, 1996.
- <sup>78</sup> D. R. Bacon, “Characteristics of a PVDF membrane hydrophone for use in the range 1–100 MHz,” *IEEE Trans. Sonics Ultrason.*, vol. SU-29, pp. 18–25, 1982.
- <sup>79</sup> R. C. Preston, S. P. Robinson, B. Zeqiri, T. J. Esward, P. N. Gelat, and N. D. Lee, “Primary calibration of membrane hydrophones in the frequency range 0.5 MHz to 60 MHz,” *Metrologia*, vol. 36, pp. 331–343, 1999.
- <sup>80</sup> D. Clorennec, “Génération et détection optiques d’ondes guidées sur une pièce cylindrique. Application au contrôle non destructif sans contact, “ Thèse de doctorat de l’université Denis Diderot, Paris 7, 2002.
- <sup>81</sup> D. Clorennec, C. Prada, and D. Royer, “Local and noncontact measurements of bulk acoustic wave velocities in thin isotropic plates and shells using zero group velocity Lamb modes, “*J. Appl. Phys.*, 101, 034908, 2007.
- <sup>82</sup> J. D. Dai et A. Moreau, “ Diffraction of longitudinal second harmonic acoustic waves in solids, “*Rev. of. Prog. In QNDE*, 13, p. 1979-1986, 1994.
- <sup>83</sup> M. Muller, “ Evaluation ultrasonore de l’os cortical par des méthodes d’acoustique linéaire et non linéaire. Application à l’évaluation du micro-endommagement osseux., “ Thèse de doctorat de l’université Paris 7, 2006.
- <sup>84</sup> X. Jacob, C. Barrière, et D. Royer , “Acoustic nonlinear parameter measurements in solids using the collinear mixing of elastic waves, “*App. Phys. Lett.*, 82, 2003.

- 
- <sup>85</sup> D. Royer et E. Dieulesaint, , "Optical probing of the mechanical impulse response of a transducer," *Appl. Phys. Lett.*, 49, p. 1056-1058, 1986.
- <sup>86</sup> O. Casula, " Caractérisation des champs acoustiques par sonde optique hétérodyne et par sonde acoustique active, " Thèse de doctorat de l'université Paris 7, 1997.
- <sup>87</sup> C. B. Scruby and L.E. Drain, "Laser Ultrasonics techniques and applications, " Adam Hilger, London, 1990.
- <sup>88</sup> P. R. Stephanishen, "Transient radiation from pistons in an infinite planar baffle, " *J. Acoust. Soc. Am.* **42**, p.1629-1638, 1971.
- <sup>89</sup> A. B. Coppens, R. T. Beyer, M. B. Seiden, J. Donohue, F. Guepin, R. H. Hodson, and C. Townsend, "Parameter of nonlinearity in fluids II, " *J. Acoust. Soc. Am*, 38, p. 797-804, 1965.
- <sup>90</sup> M.A. Breazale and J. Philip," Determination of the third-order elastic constants from ultrasonic harmonic generation measurements, " *Physical Acoustics*, 17, p.1-60, Academic Press (New York 1984)
- <sup>91</sup> C. Barrière and D. Royer, "Diffraction effects in the parametric interaction of acoustic waves : application to measurements of the nonlinearity parameter B/A in liquids ," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroel. and Freq. Contr.* ,48, p. 1706-1715, 2001.
- <sup>92</sup> R. Chanamai, F. Alba; et D.J. McClements, "Ultrasonic spectroscopy of salad dressing," *J. of Food Sci.*, 65, p. 507-513, 2000.
- <sup>93</sup> R. Marchiano, " Singularité d'amplitude et de phase en acoustique non linéaire, application au bang sonique, " Thèse de doctorat de l'université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 2003.
- <sup>94</sup> R. Marchiano, F. Coulouvrat, et R. Grenon, "Numerical simulation of schock wave focusing at fold caustics, with application to sonic boom, " *J. Acoust. Soc. Am*, 114, p. 1758-1771, 2003.
- <sup>95</sup> F. Coulouvrat et R. Marchiano, "Nonlinear Fresnel diffraction of weak schock waves, ". *J. Acoust. Soc. Am*, 114, p. 1749-1757, 2003.
- <sup>96</sup> L. Ganjehi, "Ondes de choc en milieu hétérogène, des ultrasons au bang sonique, " Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6, 2008.
- <sup>97</sup> W. F. Ames, "Numerical method for partial differential equations, " Academic press, New York, p. 315-467, 1977.
- <sup>98</sup> B. K. Novikov, O. V. Rudenko, et V. I. Timoshenko, "Nonlinear underwater acoustics, " ASA, New York, 1987.
- <sup>99</sup> G. T. Silva, S. C. Chen, J. F. Greenleaf, and M. Fatemi, "Dynamic ultrasound radiation force in fluids, " *Phys. Rev. E.*, 71, 056617, 2005.

- 
- <sup>100</sup> C. Eckart, "Vortices and streams caused by sound waves," *Phys. Rev*, 73, p. 68-76, 1948.
- <sup>101</sup> L. Rayleigh, Scientific paper (Cambridge University Press, Teddington, England), 108, p. 239, *Phil. Trans.*, 175, 1883.
- <sup>102</sup> H. C. Starritt, F. A. Duck, et V.F. Humphrey, "An experimental investigation of streaming in pulsed diagnostic ultrasound beams," *Ultrasound Med. Biol.*, 15, p. 363-373, 1989.
- <sup>103</sup> J.A. Cosgrove, J. M. Buick, S. D. Pye, and C. A. Greated, "PIV applied to Eckart streaming produced by a medical ultrasound transducer," *Ultrasonics*, 39; p. 461-464, 2001.
- <sup>104</sup> M. J. Choi, D. H. Doh, C. H. Cho, K. S. Kang, D. G. Paeng, N. H. Ko, K. S. Kim, G. H. Rim and A. J. Coleman, "Visualization of acoustic streaming produced by lithotripsy field using a PIV method," *Journal of Physics: Conference Series* 1 217–223, 2004.
- <sup>105</sup> C. J. Hartley, "Characteristics of acoustoc streaming created and measured by pulsed doppler ultrasound," *IEEE. Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.*, 44, p. 1278-1285, 1997.
- <sup>106</sup> A. Nowicki, W. Secomski, and J. Wojcik, "Acoustic streaming: comparison of low amplitude linear model with streaming velocities measured by a 32-MHz Doppler," *Ultrasound in Med. & Biol.*, 23, p. 783- 791, 1997.
- <sup>107</sup> T. Kamakura, T. Sudo, K. Matsuda and Y. Kumamoto, "Time evolution of acoustic streaming from planar ultrasound source," *J. Acoust. Soc. Am.* 100, p. 132-138, 1996.
- <sup>108</sup> S. Catheline, , " Interferférométrie speckle ultrasonore: application à la mesure d'élasticité", These de doctorat de l'Université Paris VII, D. Diderot, 1998.
- <sup>109</sup> J. Bercoff, S. Chaffai, M. Tanter, L. Sandrin, S. Catheline, M. Fink, J.L. Gennisson and M. Meunier, "In vivo breast tumor detection using transient elastography," *Ultrasound in Med. & Biol.*, 29, 10, p. 1387-1396, 2003.
- <sup>110</sup> A. P. Sarvazian, O. V. Rudenko, S. D. Swanson, J. B. Folwkes, and S. Y. Emelyanov, "Shear wave elasticity imaging: a new ultrasonic technology of medical diagnostics," *Ultrasound in Med. & Biol.*, 24, p. 1419-1435, 1998.
- <sup>111</sup> K. R. Nightingale, M. L. Palmeri, R. W. Nightingale, et G. E. Trahey, " On the feasibility of remote palpation using radiation force," *J. Acoust. Soc. Am.*, 110, p. 625-634, 2001.
- <sup>112</sup> S. Chen, "Shear property characterization of viscoelastic media using vibrations induced by ultrasound radiation force," PhD Thesis, Faculty of the Mayo Graduate school, 2002.
- <sup>113</sup> J. Bercoff, " L'imagerie échographique ultrarapide et son application à l'étude de la viscoélasticité du corps humain," Thèse de doctorat de l'Université Paris VII, D. Diderot, 2004.

- 
- <sup>114</sup> S. Callé, J-P. Remenieras, O. Bou Matar, M. E. Hachemi, et F. Patat, “Temporal analysis of tissue displacement induced by a transient ultrasound radiation force,” *J. Acoust. Soc. Am.*, 118, p. 2829, 2005.
- <sup>115</sup> L. Ostrovski, A. Sutin, Y. Il’insky, O. Rudenko, et A. Sarvazian, “Radiation force and shear motion in inhomogeneous media”, *J. Acoust. Soc. Am.*, 121, p. 1324-1331, 2007.
- <sup>116</sup> K. Aki et P.G. Richards, “Quantitative seismology-Theory and methods,” Vol.1., New York: W.H. Freeman and company, 1980.
- <sup>117</sup> L. Sandrin, M. Tanter, S. Catheline, and M. Fink, “Shear modulus imaging using 2d transient elastography”, *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., Freq. Contr.* **49**, 426-435 2002.
- <sup>118</sup> J. Ophir, I. Céspedes, H. Ponnekanti, Y. Yasdi, and X. Li, “Elastography: a quantitative method for imaging the elasticity of biological soft tissues”, *Ultrason. Imaging* **13**, 111-134 1991.
- <sup>119</sup> J. Bercoff, M. Tanter, M. Fink; “Supersonic Shear Imagine: a new technique for soft tissue elasticity mapping,” *IEEE Trans. On Ultrason. Ferroel. Freq. Contr.* , 51, p. 374-409, 2004.
- <sup>120</sup> J. Bercoff, M. Tanter, M. Fink; “Sonic boom in soft materials: The elastic Cerenkov effect”, *Appl. Phys. Lett.*, 84, p. 2202-2204, 2004.
- <sup>121</sup> M. F. Hamilton, Y. A. Ilinskii, et E. A. Zabolotskaya, “Separation of compressibility and shear deformation in the elastic energy density (L), ” *J. Acoust. Soc. Am.*, 116, p. 41-44, 2004.
- <sup>122</sup> L. D. Landau, and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, 3<sup>rd</sup> ed. (Butterworth-Heinemann, Oxford, 2002).
- <sup>123</sup> K. Brugger, “Thermodynamical definition of higher order elastic coefficient,” *Phys. Rev.*, 133, p. 1611-1612, 1964.
- <sup>124</sup> F.D. Murnaghan. “Finite deformations of elastic solids”. Chapman and Hall, New-York, 1951.
- <sup>125</sup> A. N. Norris, “Finite-amplitude waves in solids”, *Nonlinear acoustics*, chapitre 9, p. 263-277, Ed. By M.F. Hamilton and D.T. Blackstock, Academic Press. New York, 1999.
- <sup>126</sup> E. A. Zabolotskaya, “Sound Beam in a nonlinear isotropic solid,” *Sov. Phys. Acoust.*, 32, p. 296-299, 1986.
- <sup>127</sup> D. R. Bland, “Nonlinear dynamic elasticity”, Blaisdell, Waltham, MA, 1969.
- <sup>128</sup> J. Fromageau, J.-L. Gennisson, C. Schmitt, R. Maurice, R. Mongrain, and G. Cloutier, “Estimation of polyvinyl alcohol cryogel mechanical properties with 4 ultrasound

---

elastography methods and comparison with gold standard testings, " IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr., 54, p. 498-509, 2005.

<sup>129</sup> A. C. Eringen et E. S. Suhubi, "Elastodynamics, " (Academic, New York, 1974). Vol. I.

<sup>130</sup> E. A. Zabolotskaya, M. F. Hamilton, Y. A. Ilinskii, and G. D. Meegan, "Modeling of nonlinear shear waves in soft solids, " J. Acoust. Soc. Am, 116, p. 2807-2913, 2004.

<sup>131</sup> J-L. Gennisson, "Le palpeur acoustique, un nouvel outil d'investigation des tissus biologiques, " Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI, Pierre et Marie Curie, 2003.

<sup>132</sup> S. Catheline, J-L. Gennisson, and M. Fink, "Observation of shock transverse waves in elastic media, " Phys. Rev. Lett., 91, p. 43011-43014, 2003.

<sup>133</sup> X. Jacob, S. Catheline, J-J Gennisson, C. Barrière, D. Royer, et M. Fink, "Nonlinear shear wave interaction on soft solids, " J. Acoust. Soc. Am, 122, p. 1917-1926, 2007.

<sup>134</sup> D. S. Hughes et J. L. Kelly, " Second-order elastic deformation in solids, " Phys. Rev; 92, p. 145-149, 1953.

<sup>135</sup> R. N. Thurston, K. Brugger, " Third-order elastic constants and the velocity of small amplitude elastic waves in homogeneously stressed media, " Phys. Rev., 133, A1604- A1610, 1964.

<sup>136</sup> W. B. Daniels, C. S. Smith, "Pressure derivative of the elastic constant of Copper, Silver and Gold to 10 000 Bars, " Phys. Rev., 111, p. 713-721, 1958.

<sup>137</sup> Z-P. Chang, "Third order elastic constant of NaCl and KCl single crystals, " Phys. Rev., 140, A1788 - A1799, 1965.

<sup>138</sup> S. S. Sekoyan and A. E. Eremeev, "Measurement of Murnaghan's n constant for steel by the method of elliptically polarized ultrasonic waves, " Meas. Tech., 10, p. 1261-1265, 1966.

<sup>139</sup> R.A. Toupin, B. Bernstein , "Sound waves in deformed perfectly elastic materials. Acoustoelasticity effect, " J. Acoust. Soc. Am., 33, p. 216-225, 1961.

<sup>140</sup> K. Walton, "The First Pressure Derivative of the Shear Modulus of Porous Materials, " Geophys. J. Intern., 36, p. 337-344, 1974.

<sup>141</sup> K. W. Winkler, X. Liu, "Measurements of third-order elastic constants in rocks, " J. Acoust. Soc. Am, 100, p. 1392-1398, 1996.

<sup>142</sup> Y. A. Pao, W. Sachse, et H. Fukuoka "Acoustoelasticity and ultrasonic measurements of residual stresses, " Phys. Acoust. Vol. 17, W.P. Mason and R. N. Thurston, eds (Academic Press, New York), p. 61-143, 1984.

<sup>143</sup> S. Catheline, J-L Gennisson, et M. Fink, "Measurement of elastic nonlinearity of soft solid with transient elastography, " J. Acoust. Soc. Am., 114, p. 3087-3091, 2003.

- 
- <sup>144</sup> A. S. Saada, “*Elasticity, Theory and applications*, ” New York: Pergamont Press, pp.395-428, (1974).
- <sup>145</sup> J. Fromageau, E. Brusseau, D. Vray, G. Gimenez and, P. Delachartre, “Characterization of PVA cryogel for intravascular ultrasound elasticity imaging”, IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr. **50**, 1318-1324 2003.
- <sup>146</sup> J. Fromageau, J.-L. Gennisson, C. Schmitt, R. Maurice, R. Mongrain, and G. Cloutier, “Estimation of polyvinyl alcohol cryogel mechanical properties with 4 ultrasound elastography methods and comparison with gold standard testings, ” IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr., submitted for publication 2005.
- <sup>147</sup> A. Tarantola, “Problem inverse theory and method for modal parameter estimation, ” Edited by the Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 2005.
- <sup>148</sup> M. A. Breazeale, “Comparison of the non linear behavior of fluids and solids”, Proc. 13 ISNA, World scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 451, 1993.
- <sup>149</sup> K. Naugolnykh and L. Otrovsky, “Nonlinear wave processes in acoustics”, Ed. Cambridge University press, New York, Chapter 1, 15-16 1998.
- <sup>150</sup> R. J. Wang, W. H. Wang, F. Y. Li, L. M. Wang, Y. Zhang, P. Wen and J. F. Wang, “The Gruneisen parameter for bulk amorphous materials, ” J. Phys: Condens. Matter ,15, p. 603–608, 2003.
- <sup>151</sup> B. Zhang, R. J. Wang, and W. H. Wang, “Response of acoustic and elastic properties to pressure and crystallization of Ce-based bulk metallic glass, ” Phys. Rev. B; 72, 104205; 2005.
- <sup>152</sup> A. B. Coppers, R. T. Beyer, and J. Ballou. “Parameter of nonlinearity in fluids. III. Values of sound velocity in liquid metals, ”. J. Acoust. Soc. Am., 41, p. 1443-1448, 1966.
- <sup>153</sup> X. Jacob, “Applications de l’interactions d’ondes élastiques des propriétés non linéaires des matériaux et à la caractérisation de champ de pression, ” Thèse de Doctorat de l’Université Paris VII, D. Diderot, 2005.
- <sup>154</sup> B. McDonald and J. Ambrosiano; “High-order upwind flux correction methods for hyperbolic conservation laws, ” J. Comput. Physics, 56, p. 449–460, 1984.
- <sup>155</sup> X. Jacob S. Catheline, J-L Gennisson, C. Barrière, D. Royer, et M. Fink, . “Nonlinear shear wave interaction in soft solids, ” J. Acoust. Soc. Am., 122, p. 1917-1926, 2007.